2024 年考研名校数分与高代真题

微信公众号：八一考研数学竞赛

2024 年 1 月 19 日

目录

1 厦门大学 2024 年数学分析试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日上午 8:30-11:30)

微信公众号：八一考研数学竞赛

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 150 分

1. (15 分) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+n\cdot n!}{(n+1)!}$.

2. (20 分) 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上二阶连续，且 $f(0)=f(1)=0$，当 $x\in(0,1)$ 时 $f(x)\neq 0$，证明：
$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x\geq 4$$

3. (15 分) 设广义积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且 $f(x)$ 单调，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=0$.

4. (20 分) 求二元函数 $f(x,y)=x^2+y^2-4(3x-4y)$ 在 D 上最值，其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 25\}$.

5. (20 分) 设 K 为 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 上的开闭子集，且 $K\subseteq\cup_{k=1}^{\infty}u_k$，$u_k$ 为一簇开集，证明：存在 $\varepsilon>0$，能够在 K 中找到一个 u_k 使其以 ε 为半径、x 为圆心的 $B(x,\varepsilon)$ 的开球集.

6. (20 分) 设函数 $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{4}, & x\in[-\pi,0)\\ \dfrac{\pi}{4}, & x\in[0,\pi)\end{cases}$.

   (1) 求 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 展开式，并写出和函数；

   (2) 计算 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

7. (20 分) 设函数 $f(x)$ 有连续导数, 且 $f(0)=0$, 求
$$\lim_{t\to 0}\frac{\iiint_V f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\pi t^4}$$
   其中 V 是由 $x^2+y^2+z^2\leq t^2$ 围成的区域.

8. (20 分) 求曲线积分
$$\oint_C x\ln\left(x^2+y^2-1\right)\mathrm{d}x+y\ln\left(x^2+y^2-1\right)\mathrm{d}y$$
   其中 C 是被积函数定义域内从 $(2,0)$ 到 $(0,2)$ 的逐段光滑曲线.

2 复旦大学 2024 年数分高代考研真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日上午 8:30-下午 5:00)

微信公众号：八一考研数学竞赛

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 150 分

1. 填空题.

(1) 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=a_n+\dfrac{2}{a_n}$, 且 $a_1=2024$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{n}}=$______.

(2) 若 $a>0$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{n(\sqrt[n]{a}-1)}=$______.

(3) 求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^n\sqrt{n}}\left[\dfrac{x}{2x+1}\right]^n$ 的收敛域为______.

(4) 计算定积分 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2 x}{x(\pi-x)}\mathrm{d}x=$______.

(5) 设 L 是从 $(1,0)$ 沿着 $x^2+y^2=x$ 到 $(0,0)$ 的曲线, 求曲线积分

$$\oint_L\left(-\mathrm{e}^x\cos y-y^2\right)\mathrm{d}x+\mathrm{e}^x\sin y\mathrm{d}y=\_\_\_\_\_\_.$$

2. 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上二阶连续，且 $f(0)=f(1)=0$，当 $x\in(0,1)$ 时 $f(x)\neq 0$，证明:

$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x\geq 4$$

3. 讨论函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^a\mathrm{e}^{-\sqrt{n}x}$ 关于 x 在 $[0,+\infty)$ 上的连续性.

4. (1) 设 A 的特征多项式为 $f(x)=x^m(x-2)^n$, 求 $\begin{vmatrix}A & I\\ I & A\end{vmatrix}=$______.

(2) 写出

$$A=\begin{bmatrix}1 & b & a & c\\ 0 & 2 & c & a\\ 0 & 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

可对角化的所有条件.

(3) 设 n 阶方阵 A,B 满足 $AB=2A+B$, 已知 B 的所有特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 则 A 的所有特征值为______.

(4) 设 n 阶酉矩阵 A ，若 $\lim\limits_{k\to\infty}A^k$ 存在, 则 $\lim\limits_{k\to\infty}A^k=$______.

5. 设 n 维空间 V 的两个子空间 V_1V_2 的维数均为 m, 且 $m<n$, 求使得 $V=V_1\oplus U=V_2\oplus U$ 的 U 的最大维数 k, 并构造 U.

6. 设 $\mathscr{A}$ 是 $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ 到 $M_{p\times q}(\mathbb{K})$ 上的线性映射, 满足 $A(X)=AXB$, 其中 A,B,M 分别为 $p\times m,n\times q,m\times n$ 阶矩阵, 求 $\mathscr{A}$ 是可逆线性变换的充要条件并求 $\mathscr{A}^{-1}$.

7. 设 $A_1, A_2, \cdots, A_p$ 是 n 阶半正定实对称阵, 记

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_k) = \det(x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_k A_k),$$

且复数 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 的虚部均大于零. 证明: 若存在这样的 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 使

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_k) = 0$$

则 $f(x_1, x_2, \cdots, x_k) \equiv 0$.

8. 证明: n 阶复矩阵 A 与 A^k 相似的充要条件是 A 的特征多项式为 $f(x) = (x-1)^r x^{n-r}$, 其中 $r = r(A)$.

3 华东师范大学 2024 年数学分析试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日上午 8:30-11:30)

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 150 分

1. (10 分) 计算曲面 $z=\mathrm{e}^{x^2-y^2}+x^2$ 与曲面 $z=\mathrm{e}^{x^2-y^2}-y^2+1$ 所围成的封闭区域的体积.

2. (10 分) 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上以 2π 为周期的连续函数, 以 a_n, b_n 为其傅里叶级数的系数, 求
$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)\mathrm{d}t$$
的傅里叶系数 (用 a_n, b_n) 表示.

3. (15 分) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a(-\infty<a<+\infty)$.

(1) 判断 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 是否存在? 若存在请给出严格证明; 若不存在, 请举出反例并详细说明;

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(a_n-a_{n-1}\right)=0$ 或 $\{a_n\}$ 单调递增, 判断 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 是否存在? 若存在给出严格证明; 若不存在, 请举出反例并详细说明.

4. (15 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数, $f(0)=0$ 或 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$, 判断不等式
$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \le \int_0^1 \left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x$$
是否成立, 若成立, 给出严格证明; 若不成立, 请举出反例并详细说明.

5. (15 分) 讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(n+(-1)^{n-1})^p}(p>0)$ 的敛散性. (收敛时需指明是绝对收敛还是条件收敛).

6. (20 分) (1) 证明: $\{u_n(x)\}=\left\{\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\right\}$ 在 $x\in[0,1]$ 上一致收敛;

(2) 证明: $\{v_n(x)\}=\left\{\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}\right\}$ 在 $x\in[0,1]$ 上一致收敛;

(3) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$.

7. (25 分) 设 f 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的非常数函数. 请判断下列说法是否正确, 若正确, 请给出严格证明; 若不正确, 请举出反例并详细说明.

(1) 若 f 是处处不连续的周期函数, 则 f 必有最小正周期;

(2) 若 f 是处处不连续的周期函数, 则 f 没有最小正周期;

(3) 若 f 是周期函数但没有最小正周期, 则 f 必有一列趋于 0 的周期;

(4) 若 f 是连续的周期函数, 则 f 必有最小正周期.

8. (20 分) 设 f 在 $(a,+\infty)$ 上有连续的导数, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A(-\infty<A<\infty)$.

(1) 请给出例子详细说明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 未必存在;

(2) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在, 求其值;

(3) 若 $f(x)$ 是 n 阶可导函数, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(n)}(x)$ 均存在, 判断 $\forall k=1,2,\cdots,n-1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(k)}(x)$ 是否存在? 若存在, 请求出极限, 若不存在请举例并详细说明.

9. (20 分) 设 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 连续可微, $f(0,0)=0$, 且 $f_y(0,0)\neq 0$, 考虑迭代:

$$y_0(x)=0,\ y_{n+1}(x)=y_n(x)-\left(f_y(0,0)\right)^{-1} f\left(x,y_n(x)\right)$$

定义 $u_{n+1}(x)=y_{n+1}(x)-y_n(x), n\geq 0$.

(1) 证明: 对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $x\in(-\delta,\delta)$ 时, $|y_n(x)|<\varepsilon$ 对任何 $n\geq 0$ 成立, 进而当 δ 充分小时, 存在 $0<p<1$ 使得对任意 $|x|<\delta$, 有

$$|u_{n+1}(x)|\leq p\,|u_n(x)|.$$

(2) 证明: $y(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 是 $f(x,y)=0$ 在 $(0,0)$ 附近确定的一个连续隐函数.

4 华东师范大学 2024 年高等代数试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日下午 2:00-5:00)

微信公众号：八一考研数学竞赛

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 150 分

一、(共 10 题, 每题 5 分, 共 50 分.)

(1) 设 $f(x)=x^3+3x+1$, 满足同余方程 $v(x)f'(x)\equiv 1(\operatorname{mod} f(x))$ 且次数最小的多项式 $v(x)$ 为______.

(2) 实系数多项式 $f(x)=2x^3-5x^2+4x-1$ 及 $g(x)=4x^3-8x^2+5x-1$ 的最大公因式为______.

(3) 使得实对称矩阵 $\begin{pmatrix} 3+t & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3-t \end{pmatrix}$ 正定的实数 t 的范围为______.

(4) 已知方阵 A 的初等因子为 $\lambda,\lambda^2,(\lambda+1)^3,(\lambda-1)^2,(\lambda-1)^2$, 则 A 的极小各项式 $m_A(\lambda)$ 为______.

(5) 考虑标准欧氏空间 $\mathbb{R}^4$ 中的向量

$$\alpha_1=(1,1,1,-1),\alpha_2=(1,1,1,1),\alpha_3=(-1,1,1,1),\beta=(1,-1,1,1).$$

设 γ 与诸 α_i 均正交, 则 γ 与 β 的夹角的最小值为______.

(6) 设诸 α_i 同上一小题, 使得 $|\alpha_1-t\alpha_2|$ 达到最小的实数 t 为______.

(7) 已知线性映射 $\mathscr{A}:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ 满足

$$\mathscr{A}(x,y,z,w)=(x+3y+z+6w,2y+z+4w,2x-z,-x+3y+2z+6w).$$

那么核空间 $\operatorname{Ker}\mathscr{A}$ 的维数为______.

(8) 置换 $\tau^{-1}\sigma\tau$ 等于______, 这里

$$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\tau=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 4 & 2 & 7 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(9) 实对称矩阵 $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ 可通过正交相似变换化为对角阵______.

(10) $J_n(-1)+J_n(-1)^{-1}$ 的行列式值为______.

二、(每题 20 分, 共 100 分.)

1. 已知 $C(A)=\{X\in M_3(\mathbb{C})\mid AX=XA\}$ 是 $\mathbb{C}$ 上的线性空间, 这里

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 求 $C(A)$ 的维数.

(2) 考虑线性映射

$$\mathscr{A}: C(A) \to C(A), X \mapsto AX.$$

求复合映射 $\mathscr{A}^n$ 对应的表示矩阵的 Jordan 典范形 $(n \geq 1)$.

2. 设

$$A=\begin{pmatrix} -2 & -9 & 2 & -31 \\ 0 & -2 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(1) 求 A 的特征值及相应的特征子空间.

(2) 求 A^{2024}.

3. 设 $A, B \in M_n(\mathbb{K}), k \in \mathbb{K}$ 是非零常数.

(1) 证明: 如果 $AB = kI_n$, 则 $BA = kI_n$.

(2) 证明: 如果 $AB = O$, 则 $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B \leq n$.

4. 设 $A \in M_n(\mathbb{K}), f(x) \in \mathbb{K}[x], \operatorname{Ker}(f(A)) = \{X \in \mathbb{K}^n \mid f(A)X = 0\}$ 是 $f(A)$ 的核空间.

(1) 设 $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x], d(x) = \gcd(f, g)$. 证明:

$$\operatorname{Ker}(d(A)) = \operatorname{Ker}(f(A)) \cap \operatorname{Ker}(g(x)).$$

(2) 设 $\chi_A(x)$ 是 A 的特征多项式, 满足 $\chi_A(x) = f(x)g(x), \gcd(f, g) = 1$, 证明:

$$\mathbb{K}^n = \operatorname{Ker}(f(A)) \oplus \operatorname{Ker}(g(A)).$$

5. 设 $A \in M_n(\mathbb{R}), \operatorname{Im}(A) = \{Y \in \mathbb{R}^n \mid \exists X \in \mathbb{R}^n \text{ 使得 } Y = AX\}$.

(1) 证明: $\operatorname{Im}\left(AA^T\right) = \operatorname{Im}(A)$.

(2) 证明: 若 $A^2 = O$, 那么

$$\mathbb{R}^n = \operatorname{Im}(A) \oplus \operatorname{Im}\left(A^T\right) \oplus \operatorname{Ker}(B).$$

其中 $B = A^TA + AA^T, \operatorname{Ker}(B) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid BX = 0\}$.

5 湖南大学 2024 年高等代数试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日下午 2:00-5:00)

考试形式: 闭卷 考试时间: 180 分钟 满分: 150 分

1. 解答如下问题:

(1) 已知 $0<x_1<1, x_{n+1}=x_n\left(1-x_n\right), n=1,2,\cdots$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} n x_n=1$.

(2) 设 $0<p<1, 0<x_1<\dfrac{1}{p}, x_{n+1}=x_n\left(1-p x_n\right)$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} n x_n=\dfrac{1}{p}$.

2. 设函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可导.

(1) 记 $x_n=f\left(x_0+\dfrac{1}{n^2}\right)+f\left(x_0+\dfrac{2}{n^2}\right)+\cdots+f\left(x_0+\dfrac{n}{n^2}\right)-n f\left(x_0\right)$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\dfrac{1}{2} f'\left(x_0\right)$.

(2) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{n^2}+\sin\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\sin\dfrac{n}{n^2}\right)$.

(3) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)$.

3. 解答如下问题:

(1) 设 $f(x)$ 为三次多项式, $x\in[-1,1]$. 证明:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}[f(1)+4f(0)+f(-1)].$$

(2) 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的三次多项式, 证明:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right].$$

4. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续对任意的 $h>0$, 序列 $\{f(nh)\}$ 极限存在. 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在.

5. 设函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$. 证明:

(1) 存在 $M>0$, 对任意的正整数 n 及 $x\in[a,b]$, 有 $|f_n(x)|\leq M$, 且 $|f(x)|\leq M$.

(2) 若 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 那么 $\{g\left(f_n(x)\right)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $g(f(x))$.

6. 设 $f(x)=\dfrac{1}{4}x(2\pi-x), x\in[0,2\pi]$.

(1) 将 $f(x)$ 展开为 $[0,2\pi]$ 上的 Fourier 级数, 并计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$.

(2) 通过将 $f(x)$ 的 Fourier 级数逐项积分, 计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}$.

7. 设 $f(x), g(x)$ 在 (a,b) 上连续, 什么情况下方程 $f(x)y=g(x)$ 在 (a,b) 上确定了唯一的连续解?

8. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 证明: 含参量积分 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x} f(x)\mathrm{d}x$ 在 $\alpha \in [0,+\infty)$ 上一致收敛的充要条件为 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

9. 计算曲面积分

$$\iint_S xyz\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)\mathrm{d}S$$

其中 S 为 $x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$ 在第一卦限的部分.

6 湖南大学 2024 年高等代数试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日下午 2:00-5:00)

微信公众号：八一考研数学竞赛

考试形式: 闭卷　　考试时间: 180 分钟　　满分: 150 分

1. 设 $f(x)=(x+1)^{2024}-x^{2024}-1$.

   (1) 求 $f'(x)$.

   (2) 求 $f'(x)$ 的所有复数根及在复数域和实数上的不可约因式分解.

   (3) 判断 $f(x)$ 是否有重根, 并说明理由.

2. 判断题. 正确的请简要证明, 错误的请举出反例.

   (1) 已知 $V=W_1\oplus W_2$, 则对任意的 $\alpha\in V$, 有 $\alpha\in W_1$ 或 $\alpha\in W_2$.

   (2) 多项式 $p(x)$ 在数域 $\mathbb{K}$ 上不可约, 则 $p\left(x^2\right)$ 在数域 $\mathbb{K}$ 上也不可约.

   (3) 若 n 为偶数, 则存在 $A,B\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, 满足对任意的 $0\neq\alpha\in\mathbb{R}^n$, 都有 $A\alpha,B\alpha$ 线性无关.

3. 设 n 阶矩阵 $A==\begin{pmatrix}1&-1&&&\\&1&-1&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&1&-1\\&&&&1\end{pmatrix}$, 求 A^{-1}.

4. 记 $N(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}\mid\lambda A和A相似\}$.

   (1) $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, 求 $N(A)$.

   (2) A 不是幂零矩阵, 证明: $N(A)$ 为有限集.

5. 已知 V 为有限维线性空间, $\mathscr{A}$ 为 V 上的线性变换.

   (1) 证明: $\dim V=\dim\operatorname{Ker}\mathscr{A}+\dim\operatorname{Im}\mathscr{A}$.

   (2) 证明: $\mathscr{A}$ 可逆的充要条件是 $\mathscr{A}$ 为单射.

   (3) 举例说明 V 为无限维线性空间时, (2) 不成立.

6. 设 A 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶矩阵, 证明 $r(A)=r$ 的充要条件是: 存在两个线性无关的向量组

   $$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\in\mathbb{K}^n,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r\in\mathbb{K}^n.$$

   使得

   $$A=\alpha_1\beta_1^T+\alpha_2\beta_2^T+\cdots+\alpha_r\beta_r^T.$$

7. 设 A 为复数域上的 n 阶可逆矩阵, A^2 在复数域上可相似对角化, 证明: A 在复数域上可相似对角化.

8. 设 $A=\left(a_{ij}\right)$ 为 3 阶实正定对称矩阵, 且 $a_{ij}\in\{-1,0,1\}$, 求矩阵 A, 并证明你的结论.

7 中国科学技术大学 2024 年数学分析试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日上午 8:30-11:30)

微信公众号：八一考研数学竞赛

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 150 分

1. (15 分) 若 $z = f\left(x+y, xy, \dfrac{x}{y}\right)$，其中 $f(u,v,w)$ 具有二阶连续偏导数，试求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

2. (15 分) 设摆线参数方程为 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$ $a > 0, 0 \le t \le 2\pi$，求摆线的弧长.

3. (15 分) 计算曲面积分

$$\iint_S \left(x^2+y\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 $S = \left\{(x,y,z)\,|z = x^2+y^2, 0 \le z \le 1\right\}$，方向向外.

4. (15 分) 计算极限

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+1^2} + \frac{1}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n^2}\right)$$

5. (15 分) 确定含参量积分 $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln\left(1+x^3\right)}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 的定义域与连续性.

6. (15 分) 设 $a > 0, x_0 > 0, x_n = \dfrac{1}{2}\left(x_{n-1} + \dfrac{a}{x_{n-1}}\right), n \ge 1$, 证明：数列 $\{x_n\}$ 是单调数列, 并求出 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

7. (15 分) 设 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 在 $(0,0)$ 附近存在偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. 设 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 在 $(0,0)$ 点是连续的. 求证: 对于任何 $u, v \in \mathbb{R}$, $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(tu,tv) = u\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) + v\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

8. (15 分) 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上二阶可导，且 $f(-1) = f(0) = 0, f(1) = 1$，证明：存在 $\xi \in (-1,1)$ 使得 $f''(\xi) = 1$.

9. (15 分) 设 $f(x) \in R[-\pi,\pi]$，且是以 2π 为周期的函数，其傅里叶级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx + b_n \sin nx\right)$$

对 $\forall c, d \in [-\pi,\pi]$ 有

$$\int_c^d f(t)\mathrm{d}t = \int_c^d \frac{a_0}{2}\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty}\int_c^d \left(a_n\cos nt + b_n\sin nt\right)\mathrm{d}t$$

10. (15 分) 设 $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n a_k, \sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n S_k$, 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, 若存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n = \sigma$, 则 S_n 收敛于 σ.

8 中国科学技术大学 2024 年高等代数试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日下午 2:00-5:00)

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 150 分

一. 填空题 (每空 6 分, 共 60 分; 要求答案写成最简形式, 否则不得分).

1. 在 $\mathbb{R}^3$ 中, 已知点 $A=(1,-1,2), B=(5,-6,2), C=(1,3,-1)$, 则 $\triangle ABC$ 的面积 $S=$ AC 边上的高 $h=$______.

2. 点 $P=(3,2,17)$ 在平面 $3x+4y+12z-52=0$ 上的垂足 $Q=$______.

3. 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}^{2024}=$______; 行列式 $\det\begin{pmatrix} 2I_n & 4I_n \\ 9I_n & 3I_n \end{pmatrix}=$______, 其中 I_n 是 n 阶单位方阵.

4. 已知方阵 A 满足 $I-2A-3A^2+4A^3+5A^4-6A^5=O$, 则 $(I-A)^{-1}=$______.

5. 已知 λ-方阵 $A=\begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{pmatrix}$, 则 A 的初等因子组为为______.

6. 矩阵 $A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ 是同一个线性变换在两组不同基下的矩阵, 则 x 与 y 分别是 (只写一个或顺序写错不得分) . A 的 Smith 标准型______.

7. $\mathbb{R}^4$ 中向量组 $(1,-1,1-1),(-1,1,5,-5),(-1,1,1,-1),(0,0,12,-12)$ 张成子空间 V 的维数是______.

二. (20 分) 设 $\mathbb{R}^3$ 上线性变换 $\mathscr{A}$ 把 $\alpha_1=(0,1,1)^T, \alpha_2=(1,0,1)^T, \alpha_3=(1,1,0)^T$ 分别映射到 $\beta_1=(2,1,1)^T, \beta_2=(1,2,3)^T, \beta_3=(1,1,2)^T$.

(1) 求 $\mathscr{A}$ 分别在基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 和 $\{e_1,e_2,e_3\}$ 下的表示矩阵. 这里 $\{e_1,e_2,e_3\}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的自然基.

(2) 求 $\mathscr{A}$ 的特征值和特征向量.

三. (18 分) 解答如下问题:

(1) 设矩阵 $A\in\mathbb{F}^{m\times n}, B\in\mathbb{F}^{n\times m}$, 证明: $\det(I_m+AB)=\det(I_n+BA)$.

(2) 已知矩阵 $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, 秩 $r(A)=1$, 迹 $\mathrm{tr}(A)=\lambda$, 求 $\det(I+A)$.

四. (20 分) 对于任意向量 $X,Y\in\mathbb{R}^3$, 定义

$$(X,Y)=X^T\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}Y.$$

(1) 证明：上述定义给出了 $\mathbb{R}^3$ 上的一个内积.

(2) 利用 Schmidt 正交化从基向量组 $\alpha_1=(1,0,0)^T,\alpha_2=(1,0,1)^T,\alpha_3=(1,1,0)^T$ 构造一组标准正交基.

五. (16 分) 设二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)=\lambda\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)+3x_2^2-4x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$.

(1) 当 λ 取何值时, 二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)$ 为正定二次型.

(2) 当 λ 取何值时, 二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)$ 为实一次多项式的完全平方? 并求出该完全平方式.

六. (16 分) 设矩阵 A 为 n 阶 Hermite 矩阵, 其特征值满足 $\lambda_1(A)\geq\lambda_2(A)\geq\cdots\geq\lambda_n(A)$.

(1) 证明: $\lambda_n(A)\leq\dfrac{X^*AX}{X^*X}\leq\lambda_1(A)$ 对任意非零向量 $X\in\mathbb{C}^n$ 成立, 其中 X^* 表示向量 X 的共轭转置.

(2) 设 A,B 是 n 阶 Hermite 矩阵, 证明: $\lambda_1(A+B)\leq\lambda_1(A)+\lambda_1(B)$.

9　中国人民大学 2024 年数学分析试题真题

,

(考试时间：2023 年 12 月 24 日上午 8:30-11:30)

微信公众号：八一考研数学竞赛

考试形式: 闭卷　　考试时间: 180 分钟　　满分: 150 分

1. (15 分) 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{i}{n}}$.

2. (15 分) 设函数 $f(x)$ 在 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有定义且一致连续, 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x+n)=0$ (n 为自然数) 对 $\forall x>0$ 成立. 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

3. (15 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上存在二阶导数, 且满足
$$|f(x)|\leq 1,\left|f''(x)\right|\leq 1.\forall x\in[0,2]$$
对任意 $x\in[0,2]$, 试证: $\left|f'(x)\right|\leq 2$.

4. (15 分) 设函数 $f(x)=\displaystyle\int_1^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$, 证明: 存在 $\xi\in(1,2),\eta\in(1,2)$, 使得
$$f(\xi)=(2-\xi)\mathrm{e}^{\xi^2},f(2)=\eta\mathrm{e}^{\eta^2}\ln 2$$

5. (15 分) 求函数 $f(x,y,z)=xyz$ 在条件
$$x^2+y^2+z^2=1,x+y+z=0$$
下的极值.

6. (15 分) 设函数 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 连续, 且 $f(x)$ 严格递增, $0\leq g(x)\leq 1$. 证明:
$$\int_a^{a+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t}f(x)\mathrm{d}x\leq\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

7. (15 分) 设函数 $f(x,y)$ 有连续偏导数，对任意光滑曲线 L, 曲线积分 $\displaystyle\int_L 2xy\mathrm{d}x+f(x,y)\mathrm{d}y$ 与路径无关. 求 $f(x,y)$ 满足对 $\forall t$ 都有
$$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xy\mathrm{d}x+f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xy\mathrm{d}x+f(x,y)\mathrm{d}y$$

8. (15 分) 计算三重积分
$$\iiint_V x\mathrm{e}^{y+z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
其中 V 是由曲面 $y=x^2(x\geq 0)$ 和平面 $y=x,x+y+z=2$ 及 $z=0$ 围成的区域.

9. (15 分) 证明：函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{1-x^{2n}}(1-x)\sin nx$ 在 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 上一致收敛.

10. (15 分) 设 n 为正整数, 且函数

$$f_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

其中 $\alpha_0, \alpha_k, \beta_k$ 为常数, $1 \leq k \leq n$. 证明:

$$\max_{-\pi \leq x \leq \pi} \left| f_n'(x) \right| \leq n^2 \max_{-\pi \leq x \leq \pi} \left| f_n(x) \right|$$

10 中国人民大学 2024 年高等代数试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日下午 2:00-5:00)

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 150 分

1. (25 分) 计算以下行列式

(1)(5 分) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 1 & -2 \\ 10 & 11 & 12 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ =______.

(2) (10 分) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$ =______. (3) (10 分) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$ =______.

2. (15 分) 设 A 是 n 阶矩阵, 若有正整数 k, 使得 $r\left(A^k\right)=r\left(A^{k+1}\right)$, 则 $r\left(A^k\right)=r\left(A^{k+j}\right)(j=1,2,3,\cdots)$.

3. (15 分) 证明: 秩为 r 的矩阵 A 可分解为 $A=BC$, 其中 B,C 分别为行, 列满秩矩阵, 秩均为 r. 若有两种这样的分解 $A=BC=B_1C_1$, 则存在可逆矩阵 P, 使 $BP=B_1, P^{-1}C=C_1$.

4. (15 分) 设 A,B 为 $m\times n, n\times q$ 矩阵, 则有

$$r(A)+r(B)\le r(AB)+n$$

5. (25 分) 设 V 是 $\mathbb{R}$ 上的向量空间, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是其一组基, 由 $\mathscr{A}(\alpha_i)=\alpha_{i+1}(i=1,\cdots,n-1), \mathscr{A}(\alpha_n)=0$, 定义 V 上的线性映射.

(1) (5 分) 写出 $\mathscr{A}$ 在 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵表示;

(2) (5 分) 证明: $\mathscr{A}^n=0, \mathscr{A}^{n-1}\neq 0$;

(3) (10 分) 假设 $\mathscr{B}$ 是 V 上的线性映射, 满足 $\mathscr{B}^n=0, \mathscr{B}^{n-1}\neq 0$, 则存在 V 的一组基使得 $\mathscr{B}$ 的矩阵表示与 $\mathscr{A}$ 在第 (1) 问中的矩阵表示相同;

(4) (5 分) 证明: 若 n 阶实方阵 M,N 满足 $M^n=N^n=0, M^{n-1}\neq 0\neq N^{n-1}$, 则 M 与 N 相似.

6. (30 分) 设向量空间 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 满足 $\mathscr{A}^2=\mathscr{A}$, 则称 $\mathscr{A}$ 为投影映射. 证明:

(1) (5 分) V 中向量 β 属于 $\mathscr{A}$ 的像集当且仅当 $\mathscr{A}\beta=\beta$;

(2) (10 分) $V=\mathscr{A}V\oplus \operatorname{Ker}\mathscr{A}$, 且 V 中任何一个向量可以直和分解为

$$\alpha=\mathscr{A}\alpha+(\alpha-\mathscr{A}\alpha)$$

(3) (10 分) 对任意直和分解 $V = V_1 \oplus V_2$, 存在唯一的投影映射 $\mathscr{B}$ 使得

$$V_1 = \operatorname{Ker} \mathscr{B}, V_2 = \mathscr{B}V$$

(4) (5 分) 每个投影映射都有矩阵表示.

7. (25 分) 设 A 是 n 阶复方阵, 求所有与 A 可交换的复方阵, 写出详细过程.

11 电子科技大学 2024 年数学分析试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日上午 8:30-11:30)

考试形式: 闭卷　　考试时间: 180 分钟　　满分: 150 分

一、填空题 (每题 5 分, 共 30 分)

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(\cos x)^{\sin x}}{\sqrt{1+x^3}-1}=$______.
2. 若 $u=xyz$, 则 $\mathrm{d}^3u=$______.
3. 求曲线积分 $\oint_L\left(2x^2+y^2+z\right)\mathrm{d}S=$______, 其中 $L: x^2+y^2+z^2=1$ 与 $x+y+z=0$ 相交所围成的曲线.
4. 已知曲面 $z=xy$, 在曲面上找一点使得该点的法线与平面 $x+3y+z+9=0$ 垂直, 求该点的坐标为______.
5. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot 2^n}=$______.
6. 将函数 $f(x)=\pi-x, x\in(0,\pi)$ 展开成正弦级数______, 并写出和函数______.

二、计算题 (每题 10 分, 共 60 分)

1. 讨论方程组
$$\begin{cases} xy+y+y^2z=0 \\ x^y+yz-z^2+5=0 \end{cases}$$
在 $P(1,-2,1)$ 的附近能否确定形如 $x=f(z), y=g(z)$ 的隐函数组?
2. 计算曲线积分
$$\oint_L\frac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+4y)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}$$
其中 $L: x^2+y^2=1$, 方向为逆时针.
3. 求 $x+2y=1$ 与 $x^2+2y^2+z^2=1$ 相交曲线上的点到原点距离最小的点.
4. 判断数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sin^2 n}{n}$ 的敛散性, 若收敛需要判断是条件收敛还是绝对收敛.
5. 计算积分 $I(y)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\cos 2xy\,\mathrm{d}x$, 其中 $y\in\mathbb{R}$.
6. 计算二重积分
$$\iint_D\sqrt{x^2+y^2}+y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
其中 $D: x^2+y^2=4$ 与 $(x+1)^2+y^2=1$ 所围成的区域.

三、证明题 (每题 10 分, 共 30 分)

1. 已知数列 $\{x_n\}$ 满足:

$$x_n = \sin 1 + \frac{\sin 2}{2!} + \frac{\sin 3}{3!} + \cdots + \frac{\sin n}{n!}$$

证明: (1) 数列 $\{x_n\}$ 有界, 但不单调; (2) 数列 $\{x_n\}$ 收敛.

2. 证明: 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上非一致收敛.

3. 证明: 反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^5\sin^2 x}\mathrm{d}x$ 收敛.

四、综合题 (每题 15 分, 共 30 分)

1. 设 $\alpha \in (0,1)$, 已知 $\{a_n\}$ 为正项数列, 且满足

$$\liminf_{n\to\infty} n^{\alpha}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lambda \in (0,+\infty)$$

证明: 对 $\forall k > 0$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} n^k a_n = 0$.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶连续, 且满足 $f(0)f(1) \geq 0$, 证明:

$$\int_0^1 \left|f'(x)\right| \mathrm{d}x \leq 2\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x + \int_0^1 \left|f''(x)\right| \mathrm{d}x.$$

12 电子科技大学 2024 年线性代数试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日下午 2:00-5:00)

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 150 分

一、填空题

1. 若矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$, $B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}A$, 则 $\begin{pmatrix}A&\\&B\end{pmatrix}^8=$______.

2. 设矩阵 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 为正交矩阵, 则矩阵 $A=2\alpha_2\alpha_2^T+\alpha_3\alpha_3^T+\alpha_4\alpha_4^T$ 的最小多项式为______.

3. 若矩阵 A 满足 $A^4=O$, 则 A 按照相抵分类一共可以分为______ 类.

4. 若矩阵 A 为 $m\times n$ 矩阵, 且 $r(A)=r<n$, 则 $AX=b$ 的解中线性无关的向量的个数最多为______ 个.

5. 设 A 为 4 阶实对称矩阵, 三个特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=3,\lambda_3=4$, 且 $|A|=-12$, 其中 V_1,V_2,V_3 分别为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 特征子空间, 则 $\dim\left((V_1\oplus V_2\oplus V_3)^{\perp}\right)=$______.

6. 设 $\mathscr{A}$ 是 $\mathrm{End}_F(V)$ 上的线性变换, 且多项式 $f(x)$ 无重根, 则 $\mathrm{Im}\, f(\mathscr{A})+\mathrm{Im}\, f'(\mathscr{A})=$______.

二、计算 & 证明题

1. 已知矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0&1&&&\\&0&1&&\\&&0&\ddots&\\&&&\ddots&1\\32&&&&0\end{pmatrix}$$

计算 $f(x)=|xI-A|$, 并求 $\mathrm{Tr}\left((xI-A)^*\right)-f'(x)$.

2. 设 4 阶正交矩阵 A 无实特征值, 证明: 存在正交矩阵 Q, 使得

$$Q^TAQ=\begin{pmatrix}\cos\theta_1&\sin\theta_1&&\\-\sin\theta_1&\cos\theta_1&&\\&&\cos\theta_2&-\sin\theta_2\\&&\sin\theta_2&\cos\theta_2\end{pmatrix},\theta_i\neq k\alpha(i=1,2)$$

3. 设 V 是 n 维线性空间, σ 是 $\mathrm{End}_F(V)$ 上的线性变换, $f(x)$ 是 σ 的最小多项式.

(1) 证明: σ 可对角化的充要条件是 $f(x)$ 可分解为互素一次因式的乘积.

(2) 若 $A^5=I, A\in\mathbb{Q}^{n\times n}$, 当 $F=\mathbb{Q}$ 或 $F=\mathbb{C}$ 时, A 是否可以对角化? 请说明理由.

4. 设矩阵 $A=P\begin{pmatrix}2&3&0\\0&2&3\\0&0&2\end{pmatrix}P^{-1}$, 且 $C(A)=\left\{X\in\mathbb{R}^{3\times 3}\mid AX=XA\right\}$.

(1) 证明: $C(A)$ 是 $\mathbb{R}^{3\times 3}$ 的子空间;

(2) 求 $C(A)$ 的维数和基.

5. 若矩阵 $A^T=A, B^T=-B, AB=BA$ 且 A 可逆, $C=A^{-1}B$.

(1) 证明: C 为反对称矩阵;

(2) 设 V 为 n 维欧氏空间, 记线性变换 $\mathscr{A}$ 满足

$$\mathscr{A}:\alpha\to C\alpha,\forall\alpha\in V$$

证明: $\mathscr{A}(\alpha)\perp\alpha,\forall\alpha\in V$.

(3) 证明: C^2 非负定.

6. 已知 V 为 n 维欧氏空间, 且 $\mathscr{A},\mathscr{B}\in\mathrm{End}_F(V)$. 证明:

$$\dim(\mathrm{Ker}\,\mathscr{A}\mathscr{B})\le\dim(\mathrm{Ker}\,\mathscr{A})+\dim(\mathrm{Ker}\,\mathscr{B})$$

并证明 $R(AB)\ge R(A)+R(B)-n,\forall A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$.

7. 若二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&4&-1\\0&2&-3\\1&-1&3\end{pmatrix}(x_1,x_2,x_3)^T$$

将二次型 f 化为标准形.

13 华中师范大学 2024 年数学分析试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日上午 8:30-11:30)

考试形式: 闭卷 考试时间: 180 分钟 满分: 150 分

1. 计算题

(1) 计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\dfrac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right]$.

(2) 将 $f(x)=\sin x, x\in[0,\pi]$ 展开成余弦级数.

(3) 计算曲线 $\displaystyle\oint_L\frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, 其中 $L: x^2+y^2=a^2(a>0)$

(4) 计算二重积分 $\displaystyle\iint \mathrm{e}^{\frac{y}{x+y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 其中 D 为 $x=0, y=0, x+y=1$ 所围区域.

(5) 计算曲面积分 $\displaystyle\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $S: x^2+y^2+z^2=a^2$，方向外侧.

2. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a, \lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=ab$$

3. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上二阶连续可导且 $M_0=\sup\{|f(x)||x\in(0,+\infty)\}$ 以及

$$M_1=\sup\{|f'(x)||x\in(0,+\infty)\}, M_2=\sup\{|f''(x)||x\in(0,+\infty)\}$$

均为有限数, 证明:$M_1\le 2\sqrt{M_0M_2}$.

4. 设 $\{x_n\}$ 为 $(0,1)$ 上各项互异的数列，试讨论函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sgn}(x-x_n)}{2^n}$ 在 $(0,1)$ 上的一致收敛性及极限函数的连续性.

5. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，且 $g(x)=f(x)\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 单调递减，证明：$f(x)\equiv 0$.

6. 讨论 $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y$ 在 $(0,+\infty)$ 上的一致收敛性.

7. 证明: 函数 $f(x)$ 在有界区间上一致连续的充分必要条件是当 $\{a_n\}$ 是 I 上的任意柯西数列时,$\{f(a_n)\}$ 也是柯西数列.

8. 设级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，且 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)$ 绝对收敛.

(1) 叙述阿贝尔变换，并求 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 的部分和;

(2) 证明：数列 $\{b_n\}$ 收敛;

(3) 证明：$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

14 华中师范大学 2024 年高等代数试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日下午 2:00-5:00)

微信公众号：八一考研数学竞赛

考试形式: 闭卷　　考试时间: 180 分钟　　满分: 150 分

1. 填空题

(1) 若 A,B 均为 3 阶矩阵，且 $AB=O$ 且 $\operatorname{rank}(A)=1$，则 B 的秩最大为______.

(2) 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&*&*\\0&4&*\\0&0&6\end{pmatrix}$，则 $\operatorname{tr}(A^2)$=______.

(3) 若 $A=\begin{pmatrix}0&-1\\2&3\end{pmatrix}$，则 $A^{2023}=$ ______.

(4) 设 $(g(\lambda),f(\lambda)=1$，且 f,g 均为首一多项式，则 $\begin{pmatrix}g(\lambda)&0\\0&f(\lambda)\end{pmatrix}$=______.

(5) 求 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ 的 Jordan 标准型______.

(6) 子空间 $\{(x_1,x_2,x_3)|x_1+x_2+x_3=0\}$ 的维数______.

2. (1) 证明: x^3-2 为有理不可约多项式;

(2) 求有理数 a,b,c 使得 $\sqrt[3]{4}a+\sqrt[3]{2}b+c=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+2}$

3. 实二次型 $g(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2ax_1x_2+2(a+1)x_1x_3+2x_2^2+x_3^2$ 为正定二次型，求 a 范围.

4. 计算行列式 $\begin{vmatrix}a&0&b&0\\0&c&0&d\\-b&0&-a&0\\0&-d&0&-c\end{vmatrix}$.

5. 实矩阵 A 的前 r 列是 A 列向量的极大无关组当且仅当 $A'A$ 的前 r 列是 $A'A$ 的极大线性无关组.

6. 设 $\mathscr{A}$ 为不可逆线性变换，证明：存在线性变换 $\mathscr{B}\neq 0$ 满足 $\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B}\mathscr{A}=0$.

7. 若 $Q\in M_n(\mathbb{C}),Q\overline{Q'}=E_{n\times n}$，证明: Q 特征值模长为 1. 举例说明 $\exists P\in M_2(\mathbb{C})$ 的特征值模长为 1，但 $P\bar{P}'\neq E_{2\times 2}$.

15 首都师范大学 2024 年数学分析考研真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日上午 8:30-11:30)

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 150 分

1. (每题 8 分共 24 分) 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, a>0$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\tan x)^{\frac{1}{4}}+(1-\sin x)^{\frac{1}{4}}-2}{x^2}$

2. (10 分) 讨论函数 $f(x,y)=\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)^{\frac{x^4}{x^2+y^2}}$ 在点 $(0,0)$ 处的累次极限和重极限存在性，若存在求其值.

3. (10 分) 证明:$f(x)=\ln x$ 在 $(1,+\infty)$ 上一致连续，但在 $(0,1)$ 上不一致连续.

4. (10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，满足

$$f(a)=f(b)=0, f'_+(a)f'_-(b)=0$$

证明：至少存在不同的两点 $\xi,\eta\in[a,b]$ 使得 $f'(\xi)=f'(\eta)=0$

5. (12 分) 证明：二元函数 $f(x,y)=x^3-4x^2+2xy-y^2$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上有唯一的极值点，且该极值点是极大值点但不是最大值点

6. (14 分) 求 $\iiint_\Omega 2\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω 为柱面 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 及平面 $z=0, z=a(a>0)$ 和 $y=0$ 所围成的区域.

7. (20 分) 定义函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$$

(1) 证明：$f(x)$ 在点 $x=0$ 连续且可导;

(2) 证明：$f'(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续;

(3) 求 $f(x)$ 的单调区间、最大值点、最小值点.

8. (15 分) 设函数项级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\ln n}$.

(1) 求函数项级数的收敛区间;

(2) 设 $a>0$ ，证明：函数项级数在 $[a,+\infty)$ 上一致收敛.

9. (15 分) 设函数 $f_1(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，A 是一个给定实数.

$$f_{n+1}(x)=A+\int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t$$

其中 $x\in[a,b], n=1,2\ldots.$

(1) 证明：函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛;

(2) 记 $\{f_n(x)\}$ 极限函数为 $f(x)$ ，证明：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 可微.

10. (15 分) 求曲线积分

$$\oint_C x\ln\left(x^2+y^2-1\right)\mathrm{d}x+y\ln\left(x^2+y^2-1\right)\mathrm{d}y$$

其中 C 是被积函数定义域内从 $(2,0)$ 到 $(0,2)$ 的逐段光滑曲线.

11. (10 分) 设 $f(x)$ 为区间 $[a,b]$ 上定义的连续且黎曼可积函数，证明：

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x=0$$

16　首都师范大学 2024 年高等代数考研真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日下午 2:00-5:00)

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 150 分

1. 设 n 为正整数，计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1+x_1 & x_1 & \cdots & x_1 \\ x_2 & 1+x_2 & \cdots & x_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & x_n & \cdots & 1+x_n \end{vmatrix}$$

2. 判定下列多项式是否为有理数域上的不可约多项式，并说时理由:

(1) x^8+x^4+1；(2) $x^5+5x+11$

3. 设某向量空间中的五个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_5$ 满足

$$\alpha_3=\alpha_1-\alpha_2-\alpha_5,\alpha_4=\alpha_1-\alpha_3+\alpha_5$$

且这组向量的秩 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_5)=3$，求方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_5\alpha_5=0$ 的一般解.

4. 证明: 不存在复数域上的方阵 A，使得 $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. 设 $\alpha_1=(1,1,1,1),\alpha_2=(3,2,1,1),\alpha_3=(0,2,2,2)$ 为欧氏空间 $\mathbb{R}^4$ 中的向量

(1) 令 $V=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 由向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 生成的子空间，求 V 的正交补 $V^{\perp}$;

(2) 令 $\beta=(1,0,2,0)$，求 β 在 V 中的正交投影以及 β 在 $V^{\perp}$ 中的正交投影.

6. 证明: 奇数维欧氏空间的任一正交变换的全部实特征值之和必为奇数.

7. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2023 & 2022 \end{pmatrix}$, 计算 A^{2024}.

8. 设 $\mathbb{C}$ 为复数域，n 为大于 1 的整数，$V=\left\{\sum\limits_{0\le i<n} C_i x^i | C_i \in \mathbb{C}\right\}$ 为多项式环 $\mathbb{C}[x]$ 的一个子集，定义映射

$$\mathscr{A}:\ V \longrightarrow V$$

$$\sum_{0\le i<n} C_i x^i \longmapsto \sum_{0\le i<n} iC_i x^{i-1}$$

(1) 证明：V 是 $\mathbb{C}$ 上的一个线性空间，$\mathscr{A}$ 是 V 上的一个线性变换;

(2) 求 $\mathscr{A}$ 的极多项式和特征多项式;

(3) 求 $\mathscr{A}$ 的所有不变子空间.

9. 设 n 为正整数，$M(n,R)$ 为实数域 $\mathbb{R}$ 上所有 n 阶方阵构成的线性空间，给定两个方阵 $A,B \in M(n,R)$ ，定义映射

$$\begin{aligned} \mathscr{A}: M(n,R) &\to M(n,R) \\ X &\longmapsto A \times B \end{aligned}$$

(1) 证明: $\mathscr{A}$ 为线性变换;

(2) 设 $a = \mathrm{Tr}(A), b = \mathrm{Tr}(B)$ 分别为矩阵 A,B 的迹，求 $\mathrm{Tr}(\varphi)$;

(3) 设 $|A|,|B|$ 分别为 A,B 的行列式，求 $\mathscr{A}$ 的行列式.

10. 利用正交变换将下面的实二次型化为标准形:

$$7x_1^2 + 7x_2^2 - 5x_3^2 + 32x_1x_2 - 16x_1x_3 - 16x_2x_3$$

17 东南大学 2024 年数学分析试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日下午 2:00-5:00)

微信公众号：八一考研数学竞赛

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 150 分

一. 计算题与解答题. 每题 9 分, 共 90 分.

1. 设 $y=y(x)$ 是由方程

$$\arcsin(xy)+y^2-ye^{xy}=2$$

所确定的隐函数, 求曲线 $y=y(x)$ 在点 $(0,2)$ 处的切线方程.

2. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n^2+1}-1\right)\sin\dfrac{n\pi}{2}$.

3. 计算不定积分 $\displaystyle\int\frac{\arccos x}{x^2}\mathrm{d}x$.

4. 计算定积分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x+2}{e^x+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x$.

5. 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!2^n}(x-2)^n$ 的收敛域与和函数.

6. 计算二重积分 $\displaystyle\iint_D\frac{\sin y\cos y}{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 为直线 $y=x$ 与抛物线 $x=y^2$ 所围成的区域.

7. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$ 求二阶混合偏导数 f_{xy}.

8. 设 $f(x)=\pi-x, x\in[0,\pi]$.

(1) 将 $f(x)$ 展开为余弦级数, 并在 $[-\pi,\pi]$ 上写出和函数的表达式.

(2) 判断该级数在 $[0,\pi]$ 内是否一致收敛, 并说明原因.

9. 计算曲线积分

$$\int_L y^2\,\mathrm{d}x+z^2\,\mathrm{d}y+x^2\,\mathrm{d}z$$

其中 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(z\geq 0,a>0)$ 与柱面 $x^2+y^2-ax=0$ 的交线, 从 z 轴正向看去取逆时针方向.

10. 解答如下问题:

(1) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos x}{\int_0^x\frac{\ln(1+xy)}{y}\,\mathrm{d}y}$.

(2) 计算含参量反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{ye^y}\,\mathrm{d}y$.

二. 证明题. 每题 10 分, 共 50 分.

11. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导,

$$f(0)=f(1)=0,\ f\left(\frac{1}{2}\right)=1.$$

证明: 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f'(\xi) = 1$.

12. 设 $D = \{(x,y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < +\infty\}$, 证明: 对任意的 $(x,y) \in D$, 成立不等式

$$yx^y(1-x) < \mathrm{e}^{-1}.$$

13. 设 $f_n(x) = n^\alpha x\mathrm{e}^{-nx}$.

(1) 当 α 取何值时, $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$?

(2) 当 α 取何值时, $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛?

14. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 以 S_n 表示前 n 项的和. 证明:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{S_n}$ 发散.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{S_n^2}$ 收敛.

15. 设 $f(x,y)$ 在区域 $D:(0,1)\times(0,1)$ 内分别对自变量 x 和 y 连续, 并且对固定的 x, $f(x,y)$ 关于 y 是单调的. 证明: $f(x,y)$ 在区域 D 内为二元连续函数.

16. 解答如下问题:

(1) 叙述 $\mathbb{R}^n$ 上的有限覆盖定理.

(2) 设对任意的 $x_0 \in [a,b]$, 有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$. 证明: $f(x) \in R[a,b]$ 且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$.

18　东南大学 2024 年高等代数试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日下午 2:00-5:00)

考试形式: 闭卷　　考试时间: 180 分钟　　满分: 150 分

1. (20 分) 设 V 为数域 $\mathbb{P}$ 上的全体 4 维列向量构成的向量空间.

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix},\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\a\end{pmatrix}.$$

若 V 的子空间 $V_1=\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3\mid k_1,k_2,k_3\in P\},V_2=\{l_1\beta_1+l_2\beta_2\mid l_1,l_2\in P\}$.

(1) 参数 a 满足什么条件时, V_1+V_2 为直和?

(2) 若 V_1+V_2 不是直和, 分别求 V_1+V_2 与 $V_1\cap V_2$ 的一组基.

2. (20 分) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(BX)^T(BX)$, 其中 $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&1\\0&0&a\end{pmatrix}$, a 为实数, $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$. 已知 $f(x_1,x_2,x_3)$ 经过可逆线性变换化为标准形 $y_1^2+y_2^2+0y_3^2$. 求 a 的值, 并求一个正交矩阵 Q, 使得 $f(x_1,x_2,x_3)$ 经过正交变换 $X=QY$ 化为标准形.

3. (20 分) 设 A 为 3 阶方阵, E 为 3 阶单位阵.

(1) 若 $|E-A|=|-E-A|=|2E-A|=0$, 求 $|3E-A|$.

(2) 若 $|E-A|=1,|-E-A|=-1,|2E-A|=2$, 求 $|3E-A|$.

4. (20 分) 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，b 为 m 维列向量.

(1) 若存在 $n\times m$ 矩阵 B, 使得 $BA=E$, 则对于线性方程组 $Ax=b$ 有何结论？并说明理由.

(2) 若存在 $n\times m$ 矩阵 B, 使得 $AB=E$, 则对于线性方程组 $Ax=b$ 有何结论？并说明理由.

5. (15 分) 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1-a&a&0\\-a&1+a&b\\0&0&1\end{pmatrix}$$

针对参数 a,b 的不同取值，分别求 A 的不变因子及初等因子.

6. (10 分) 设非零矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n},a_{ij}$ 不全为零, A_{ij} 表示其代数余子式, 且满足 $a_{ij}+A_{ij}=0(i,j=1,2,\cdots)$. 证明: A 可逆.

7. (15 分) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为欧氏空间 V 的一组基, $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 为 V 中的一个正交向量组, $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$ 为 V 中的另一个正交向量组, 已知对于任意的 $i=1,2,\cdots,n$, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_i$ 能由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_i$ 线性表出, 也能由 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_i$ 线性表出. 证明: 存在数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$, 使得

$$\beta_1=k_1\gamma_1,\beta_2=k_2\gamma_2,\cdots,\beta_n=k_n\gamma_n.$$

8. (10 分) 设 $f(x),g(x)$ 为多项式, A 为 n 阶矩阵, 证明:

$$r\begin{pmatrix} f(A) \\ g(A) \end{pmatrix}=r(f(A),g(A))$$

9. (10 分) 设 V 是数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 维线性空间，其中 n 为正整数，I 为 V 上的恒等变换，即 $I(\alpha)=\alpha,\alpha\in V$, 且 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 为 V 上的线性变换, 若 V_1 为 $I-\mathscr{A}\mathscr{B}$ 的值域, V_2 为 $I-\mathscr{B}\mathscr{A}$ 的值域，证明：$\dim V_1=\dim V_2$.

10. (10 分) 已知 A,B 均为 n 阶实对称矩阵, 且 A 为正定矩阵, AB 的特征值全为 1 , 证明: 存在次数小于 n 的多项式 $f(x)$, 使得 $B=f(A)$.

19 南开大学 2024 年数学分析试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日上午 8:30-11:30)

微信公众号：八一考研数学竞赛

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 150 分

1. (20 分) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$.

2. (20 分) 设 z 是由方程 $2x^3z-3x^2y^2-2xyz^2-4y^3z+4=0$ 确定的 x,y 的隐函数, 求在 $x=2,y=1,z=2$ 处的全微分 $\mathrm{d}z$.

3. (20 分) 判断广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{x^3+1}\mathrm{d}x$ 敛散性.

4. (25 分) 计算曲线积分
$$\oint_L\left(x^3y+\mathrm{e}^y\right)\mathrm{d}x+\left(xy^3+5x^3y^2+x\mathrm{e}^y\right)\mathrm{d}y.$$
其中 L 为逆时针方向椭圆 $4x^2+9y^2=36$.

5. (25 分) 求函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)\left(\frac{x-1}{x}\right)^n$ 的收敛域及和函数.

6. (15 分) 设 $f(x)$ 在 $[0.1]$ 上单调递增, $f(0)=0,f(1)=1$, 若 n 为正整数, $\xi_k\in\left[\dfrac{k-1}{n},\dfrac{k}{n}\right],k=1,2,\cdots,n$, 证明
$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{n=1}^{n}f\left(\xi_k\right)\right|\le\frac{1}{n}.$$

7. (15 分) 设 $f(x)$ 在 $[a.b]$ 上连续, $f(a)<f(b)$, 证明: 存在 $[c.d]\subseteq[a.b]$, 使得 $f(x)$ 在 $[c.d]$ 上最小值为 $f(a)$, 最大值为 $f(b)$.

8. (10 分) 设 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是一个收敛的正项级数, 令 $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n|\sin nx|$, 已知 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上满足利普希兹条件, 即存在常数 $L>0$, 使得对任意实数 $x,y\in\mathbb{R}$, 都有
$$|f(x)-f(y)\le L|x-y|$$
证明: 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}na_n$ 收敛.

20 南开大学 2024 年高等代数试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日下午 2:00-5:00)

微信公众号：八一考研数学竞赛

考试形式: 闭卷　　考试时间: 180 分钟　　满分: 150 分

1. (30 分) 若 $f(x)=x^5-x^3-x-1, g(x)=x^4+2x^2+5x+2$, 计算 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的首项系数为 1 的最大公因式 $(f(x),g(x))$.

2. (20 分) 计算行列式
$$\begin{vmatrix} 1+x & x & 0 & 0 \\ x & x+x^2 & x^2 & 0 \\ 0 & x^2 & x^2+x^3 & x^3 \\ 0 & 0 & x^3 & x^3+x^4 \end{vmatrix}.$$

3. (20 分) 若四阶方阵 A 的伴随矩阵
$$A^*=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
求 A^3.

4. (20 分) 设 $V=\mathbb{R}[x]_4$ 为次数小于 4 的实系数多项式构成的实线性空间, 定义线性变换 $\mathscr{A}: V \to V$ 如下
$$\mathscr{A}(f(x))=\left(1-x^2\right)f''(x)-2xf'(x). \quad \forall f(x)\in V.$$
求 V 的一组基, 使得 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵为对角矩阵.

5. (20 分) 求矩阵
$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
的 Jordan 标准型.

6. (20 分) 设 $\tilde{A},\tilde{B}\in\mathbb{R}^{m\times(n+1)}$ 分别是两个线性方程组的增广矩阵, 若这两个线性方程组都有解且解集相同, 则 $\tilde{A},\tilde{B}$ 的行向量组等价.

7. (10 分) 若 $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 且 A 为正定矩阵, B 为半正定矩阵, 则 $|A+B|\geq|A|$.

8. (10 分) 设 $V=\mathbb{C}^{n\times n}$ 为 n 阶复方阵构成的复线性空间, $A\in V$, 线性变换 $\mathscr{A}: V\to V$ 定义为
$$\mathscr{A}(x)=AX-XA' \quad \forall x\in V.$$
若 $\mathscr{A}$ 有 n 个互不相等的特征值, 求证: $V=\mathscr{A}^{-1}(0)\oplus DV$.

21 重庆大学 2024 年数学分析试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日上午 8:30-11:30)

微信公众号：八一考研数学竞赛

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 150 分

1. 计算数列极限
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\ln(1+n)-\ln n}-n\right).$$

2. 计算第一类曲面积分 $\iint_S\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}S$, 其中 S 是立体 $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$ 的边界.

3. 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(2n-1)}$ 的和.

4. 计算第二类曲线积分
$$\int_L\left(y^2-z^2\right)\mathrm{d}x+\left(2z^2-x^2\right)\mathrm{d}y+\left(3x^2-y^2\right)\mathrm{d}z.$$
其中 L 是平面 $x+y+z=2$ 与柱面 $|x|+|y|=1$ 的交线, 从 z 轴正方向往下在去, L 是F时针方向.

5. 已知三元函数 $f(x,y,z)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上具有连续的二阶偏导数, 设 $\mathbb{R}^3$ 中光滑简单封闭曲面的全体为 Σ, 对于 $S\in\Sigma$, 用 n 表示 S 的外法线单位方向向量, $\dfrac{\partial f}{\partial n}$ 表示 f 沿 n 的方向导数.

(1) 证明: f 在 $\mathbb{R}^3$ 上满足
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0\ (\text{即} f\ \text{为}\mathbb{R}^3\ \text{上的调和函数})$$
当且仅当 $\iint_S\dfrac{\partial f}{\partial n}\,\mathrm{d}S=0(\forall S\in\Sigma)$.

(2) 设 $f(x,y,z)$ 为 $\mathbb{R}^3$ 上的调和函数, $S\in\Sigma$, 且 S 围成的有界闭区域记作 V, 证明:
$$f\left(x_0,y_0,z_0\right)=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left(f\frac{\cos(r,n)}{|r|^2}+\frac{1}{|r|}\frac{\partial f}{\partial n}\right)\mathrm{d}S.$$
其中 $\left(x_0,y_0,z_0\right)$ 为 V 内部的一个定点, $r=\left(x-x_0,y-y_0,z-z_0\right),(r,n)$ 表示两向量的夹角, $|r|$ 表示向量 r 的模长.

(3) 若函数 f 和 $g\in C[0,1]$ 在单位球 $\Omega=\left\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le 1\right\}$ 上满足
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=g\left(x^2+y^2+z^2\right).$$
证明: $\displaystyle\iiint_\Omega\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\pi\int_0^1\sqrt{t}(t-1)g(t)\mathrm{d}t.$

6. 判断下列四个命题的正误. 正确的, 请给出证明; 错误的, 需举出反例.

(1) 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续且有界, 则 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

(3) 若二元函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点关于 x 和 y 都不存在偏导数, 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 沿 x 轴的方向导数必不存在.

(4) 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有界且只存在有限个不连续点, 则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

7. 设参数 $\alpha > 0$, 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\sin x}\sin(2x)}{x^x}\,\mathrm{d}x$ 的收敛性 (包括条件收敛和绝对收敛).

8. 若级数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在闭区回 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上二阶可导, 并且它们在 (a,b) 内有相等的最大值, $f(a) = g(a), f(b) = g(b)$, 求证: 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f''(\xi) = g''(\xi)$.

9. 若函数列 $\{f_n(x)\}_{n-1}^{\infty}$ 在团区间 $[a,b]$ 上逐点收敛于 $f(x)$.

(1) 假设每个 $f_n(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续, 并且 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 一致收敛, 证明: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

(2) 假设每个 $f_n(x)$ 都在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 并且 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 一致收敛, 证明: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

(3) 假设每个 $\{f_n(x)\}$ 都在 $[a,b]$ 上可微, 存在常数 $M > 0$, 对任意的 x 和正整数 n, 都有 $\left|f_n'(x)\right| \le M$. 证明: $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

22 重庆大学 2024 年高等代数试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日下午 2:00-5:00)

微信公众号：八一考研数学竞赛

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 150 分

1. 计算题. 每题 8 分, 共 40 分.

(1) 当 a, b 满足什么条件时, 实系数多项式 $f(x) = x^3 + 3ax + b$ 有重因式.

(2) 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}.$$

其中 $a_i \neq 0(i = 1, 2, \cdots, n)$.

(3) 设线性方程组

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = k - 3 \\ x_1 + kx_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + kx_3 = -2 \end{cases}$$

(i) k 为何值时, 方程组无解?

(ii) k 为何值时, 方程组存在唯一解?

(ii) k 为何值时, 方程组存在无穷多解? 并求出通解.

(4) 在线性空间 $\mathbb{P}^3$ 中, 已知 $\alpha_1 = (1, 1, 0), \alpha_2 = (0, 1, 1), \alpha_3 = (0, 0, 1)$, 线性变换定义如下:

$$\mathscr{A}\alpha_1 = (2, 1, 1), \mathscr{A}\alpha_2 = (1, 0, 1), \mathscr{A}\alpha_3 = (1, 1, 2).$$

求 $\mathscr{A}$ 在 $\beta_1 = (1, 0, 0), \beta_2 = (-1, 1, 0), \beta_3 = (0, -1, 1)$ 下的矩阵.

2. (10 分) 解答如下问题:

(1) 设不可约多项式 $p(x)$ 是多项式 $f(x)$ 的 $k(k \geq 2)$ 重因式. 证明: $p(x)$ 是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式. 并用反例说明反之不成立.

(2) 求一个三次多项式 $f(x)$, 使得 $f(x)+1$ 能被 $(x-1)^2$ 整除, $f(x)-1$ 能被 $(x+1)^2$ 整除.

3. (15 分) 设矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta+\alpha_3)$, 其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta$ 为 4 维列向量, 方程组 $AX=\beta$ 的通解为 $X=\xi_0+k\xi$, 其中 k 为任意常数, $\xi=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\xi_0=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

(1) 求矩阵 A,B 的秩.

(2) 求方程组 $BY=\alpha_1-\alpha_2$ 的通解.

4. (15 分) 设 A,B 为 n 阶矩阵, $C=\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}$.

(1) 当 A,B 可逆时, 求 C 的逆矩阵和伴随矩阵.

(2) 当 A,B 中至少一个不可逆时, 证明 C 也不可逆.

(3) 当 A,B 中至少一个不可逆时, 求 C 的伴随矩阵.

5. (15 分) 设 A 是 n 阶实对称矩阵, 证明: A 可逆当且仅当存在实矩阵 B, 使得 $AB+B'A$ 正定, 其中 B' 是 B 的转置矩阵.

6. (10 分) 设 V 为 n 维线性空间, $1\le r<n$, 证明: V 有无穷多个 r 维的子空间.

7. (15 分) 设向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$, 令

$$c=\beta\alpha'=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n, A=\alpha'\beta$$

其中 α' 是 α 的转置.

(1) 证明: 当 $c\neq 0$ 时, A 可对角化.

(2) 当 $c=0$ 时, A 是否可对角化? 并说明理由.

8. (15 分) 设数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 阶方阵 A 是指数为 k 的幂零矩阵, 即 $A^{k-1}\neq O, A^k=O$. 其若尔当标准形为

$$J=\begin{pmatrix}J_1&&&\\&J_2&&\\&&\ddots&\\&&&J_s\end{pmatrix}, \text{其中} J_i=\begin{pmatrix}0&1&&\\&0&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&0\end{pmatrix}_{n_i\times n_i}$$

(1) 证明: $s=n-r(A)$.

(2) 证明: $k=\max\{n_1,n_2,\cdots,n_s\}$.

(3) 利用 (1) 和 (2) 的结论求矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&6&-15\\1&2&-5\\1&2&-5\end{pmatrix}$ 的若尔当标准形.

9. (15 分) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵为 A, 其在正交变换 $X=QY$ 下的标准形为 $y_1^2+y_2^2$, 其中 $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$, 且 Q 的第三列为 $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$.

(1) 求 A.

(2) 证明 $A+E$ 为正定矩阵, 其中 E 为 3 阶单位矩阵.

23 浙江大学 2024 年数学分析试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日上午 8:30-11:30)

微信公众号：八一考研数学竞赛

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 150 分

1. 计算题.

(1) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\cos\frac{\pi}{2n}\cos\frac{3\pi}{2n}\cdots\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}$.

(2) 求二重积分 $\iint_D|3x+4y|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D:\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$.

(3) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}\right)$.

(4) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x|\sin t|\mathrm{d}t$.

2. 回答下述两个问题.

(1) 叙述确界原理;

(2) 利用闭区间套定理证明确界原理.

3. 已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}, x_{n+1}=\sqrt{\frac{2x_n^2}{x_n^2+2}}$.

(1) 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(x_n-\ln\left(1+x_n\right)\right)$.

4. 已知函数 $K(x,y)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 连续, 定义在 $[0,1]$ 上的函数列 $\{f_n(x)\}$ 满足 $f_1(x)$ 连续, 且

$$f_n(x)=\int_0^x K(x,y)f_{n-1}(y)\mathrm{d}y$$

证明：函数列 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 0 .

5. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均在 $[0,1]$ 连续, 数列 $\{x_n\}\in[0,1]$，满足 $f\left(x_n\right)=g\left(x_{n+1}\right)$. 证明: 存在 $\xi\in[0,1]$, 使得 $f(\xi)=g(\xi)$.

6. 已知函数 $f:[a,b]\mapsto\mathbb{R}$ 的图像 $G_f:=\{(x,f(x)):x\in[a,b]\}$ 为有界闭集，证明: f 在 $[a,b]$ 上连续.

7. 设 $f(x)$ 是 $(0,1]\to\mathbb{R}$ 上的无界单调函数, 且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

8. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可微, 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=1$，且满足

$$f(x+1)-f(x)=f'(x),\forall x\in\mathbb{R}$$

证明: $f(x)=x+C$.

9. 设 f 在 $[0,1]$ 上连续, 定义

$$g(t)=\int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2} f(x) \mathrm{d} x, t \in \mathbb{R}$$

证明: 函数 g 在 $t=0$ 处连续当且仅当 $f(0)=0$.

24 浙江大学 2024 年高等代数试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日下午 2:00-5:00)

微信公众号：八一考研数学竞赛

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 150 分

1. 若 $\frac{5}{11}$ 是整系数多项式 $f(x)$ 的根, 证明: $f(\sqrt{-1})f(-\sqrt{-1})$ 是正整数, 且是 146 的倍数.

2. 求线性方程组
$$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-x_4=0 \\ 3x_1+x_2+x_3-3x_4=0 \\ x_1+5x_2-5x_3-x_4=0 \end{cases}$$
的基础解系, 若该方程组的解和另外一个解为 $k_1\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 的方程组有公共解, 求出所有公共解.

3. 设 $X=(x_1,x_2,x_3,x_4)$, X^T 是 X 的转置, 问是否存在一次多项式
$$u_i(x)=a_ix_1+b_ix_2+c_ix_3+d_ix_4(i=1,2,3,4)$$
满足
$$X\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}X=\begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_3(x) & u_4(x) \end{vmatrix}$$
并说明理由.

4. 设 $\mathbb{R}$ 是实数域, 实向量空间 $\mathbb{R}^3$ 两组向量分别为 $\alpha_1=(-1,1,0),\alpha_2=(2,-1,2),\alpha_3=(0,1,b)$ 和 $\beta_1=(1,0,-1),\beta_2=(-1,1,1),\beta_3=(1,1,c)$.

   (1) 当 b,c 取何值时, 不存在 $\mathbb{R}^3$ 上的线性变换 $\mathscr{T}$, 满足 $\mathscr{T}(\alpha_i)=\beta_i, i=1,2,3$.

   (2) 当 b,c 取何值时, 至少存在两个 $\mathbb{R}^3$ 上的线性变换 $\mathscr{T}$ 满足 $\mathscr{T}(\alpha_i)=\beta_i, i=1,2,3$.

   (3) 当 b,c 取何值时, 存在 $\mathbb{R}^3$ 上唯一的线性变换 $\mathscr{T}$, 满足 $\mathscr{T}(\alpha_i)=\beta_i, i=1,2,3$. 这样的线性变换是正交变换吗? 为什么?

5. 设 A 是 2024 阶方阵, 主对角线上全是偶数, 其余的都是奇数. 证明该矩阵为可逆矩阵.

6. 求 $f(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2, g(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2$ 的最大公因式 $d(x)$ 以及多项式 $u(x),v(x)$ 满足 $d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$.

7. 已知矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 3 & a & 6 \\ -5 & -7 & -1 \\ b & -6 & -7 \end{pmatrix}$$

的特征值 λ 对应的特征向量 $\alpha=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, 求该矩阵的若当 (Jordan) 标准型.

8. 设 A 是 n 阶非幂零矩阵, S 是使得 λA 与 λ 相似的复数 λ 的集合, 证明: S 是一个有限集.

9. 设 α,β,γ 是有理数域上线性空间 V 中的向量, 其中 $\alpha \neq 0$, 假如存在 V 上线性变换 $\mathscr{T}$, 使得

$$\mathscr{T}\alpha=\beta, \mathscr{T}\beta=-\gamma, \mathscr{T}\gamma=\alpha-\beta.$$

证明: α,β,γ 在 V 中线性无关.

10. 已知 $\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{C}$ 是有限维线性空间上的三个线性变换, 证明: $\mathscr{A}+\mathscr{B}-\mathscr{A}\mathscr{C}\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{A}+\mathscr{B}-\mathscr{B}\mathscr{C}\mathscr{A}$ 核空间是同构的.

25　武汉大学 2024 年数学分析试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日上午 8:30-11:30)

考试形式: 闭卷　　考试时间: 180 分钟　　满分: 150 分

一. 求导数或极限.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\arctan x}{\tan x-\arcsin x}$.

2. $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$, 求 $y^{(2023)}(0)$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\dfrac{k}{n}\cdot\sin\dfrac{k}{n^2}$.

二. 求积分.

1. 以 $x=ty$ 参数化曲线 $x^2+y^3=xy$, 求曲线所围区域的面积.

2. 求曲面积分
$$\iint_S (xy+yz+zx)\mathrm{d}S.$$
其中 S 是 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被 $x^2+y^2=2ay$ 截掉的部分.

3. 用含参量积分求 $\displaystyle\int_0^1\frac{\arctan x}{x\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

三. 证明题.

1. 证明:
$$\frac{2n}{2n+1}\le\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\mathrm{e}}\le\frac{2n+1}{2n+2}(n\ge 1).$$

2. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上三次可导, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'''(x)$ 均存在, 证明:
$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}f''(x)=\lim_{x\to+\infty}f'''(x)=0.$$

3. 设 $f(x)$ 是 $[-1,1]$ 上的连续函数, 证明:
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-1}^{1}\frac{\varepsilon f(x)}{\varepsilon^2+x^2}\mathrm{d}x=\pi f(0).$$

4. 设 $x>0, y>0$, 证明:$xy-\mathrm{e}^{x-1}\le y\ln y$.

5. 证明: $\displaystyle\int_0^1(x\ln x)^n\mathrm{d}x=\frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$, 并利用此结论证明: $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$.

6. 设 $\{f_n(x)\}$ 是区间 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$ 的可积函数列. 证明: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.$$

26 武汉大学 2024 年高等代数试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日下午 2:00-5:00)

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 150 分

1. 设数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维矩阵 A 的第 i 行第 j 列的元素是 $a_i - b_j$.

   (1) 求 $|A|$;

   (2) 当 $n > 2, a_1 \neq a_2, b_1 \neq b_2$ 时，求 $Ax = 0$ 的解空间的维数和一个基.

2. 设 n 阶实方阵 A 的特征值全为实数，且 A 的所有一阶主子式和二阶主子式之和都是零，证明：$A^n = 0$.

3. 设 n 维欧氏空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 满足 $\mathscr{A}^3 + \mathscr{A} = 0$，证明：$\mathscr{A}$ 的迹等于 0.

4. 设 A, B 是 n 阶实矩阵，且 $A^2 + B^2 = AB$，若 $AB - BA$ 是可逆矩阵，则 n 是 3 的倍数.

5. 设 A, B 是 n 阶复矩阵,若 $AB = BA$,则存在 n 阶可逆复矩阵 P,使得 $P^{-1}AP, P^{-1}BP$ 都是上三角矩阵.

6. 设方阵 A 的特征值 1，证明：对每一个自然数 s，有 A^s 与 A 相似.

7. 设 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ 为多项式 $(n \geq 2)$，且满足

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 | f_1(x^n) + x f_2(x^n) + \cdots + x^{n-1} f_n(x^n)$$

   证明：存在常数 c 使得 $(x-1)^n | \prod_{i=1}^{n} (f_i(x) - c)$.

8. 设 $f(x), g(x)$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上互素多项式, A 是数域 $\mathbb{K}$ 上 n 阶矩阵, 证明: $f(A)g(A) = 0$ 的充分必要条件是 $r(f(A)) + r(g(A)) = n$.

27 华南师范大学 2024 年数学分析试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日上午 8:30-11:30)

微信公众号：八一考研数学竞赛

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 150 分

1. 求极限 (每题 10 分，共 50 分)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{\sin x}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right), m, n$ 是任意正整数.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\cos\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)\right]^2$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

(5) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$.

2. 计算题 (每题 10 分，共 40 分)

(1) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 存在二阶导数, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x^3}+\dfrac{f(x)}{x^2}\right)=0$, 求 $f'(0), f''(0)$.

(2) 计算定积分 $\displaystyle\int_{-2}^{-\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$.

(3) 求三重积分 $\displaystyle\iiint_{\Omega} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω 为平面 $x+2y+z=1, x=0, y=0, z=0$ 围成的区域.

(4) 已知 u 是关于 x, y 的函数，且满足 $u=f(x,y,z,t) g(y,z,t)=0, h(z,t)=0$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}$.

3. (10 分) 设 $f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 的单调增加函数,且存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(a_n\right)=A$, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$.

4. (10 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续单调增加，证明

$$\int_a^b x f(x)\mathrm{d}x \geq \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

5. (10 分) 证明：函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^5x^2}$ 在 $[0,+\infty)$ 一致收敛.

6. (10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续，广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，证明

$$\lim_{\lambda\to 0^+}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda x} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

7. (20 分) 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

证明: (1) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 连续;

(2) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 存在偏导数;

(3) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的偏导数不连续;

(4) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微.

28 华南师范大学 2024 年高等代数试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日下午 2:00-5:00)

微信公众号：八一考研数学竞赛

考试形式: 闭卷　　考试时间: 180 分钟　　满分: 150 分

1. (20 分) 设
$$f(x)=2x^3-3x+4, g(x)=x^2-2x+3$$
(1) 求 $(f(x), g(x))$;
(2) 求 $u(x), v(x)$ 使得 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x), g(x))$.

2. (15 分) 计算行列式
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & x \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & x & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ x & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$$

3. (20 分) 设有五个未知量的矩阵方程 $AX=b$ ，其系数矩阵秩为 3 ，且
$$\eta_1=(1,1,1,1,1), \eta_2=(1,2,3,4,5), \eta_3=(1,0,-3,-2,-3)$$
为方程组的解，
(1) 说明 b 不是零向量.
(2) 检验 $\eta_1+\eta_2+\eta_3$, $\dfrac{\eta_1+\eta_2+\eta_3}{3}$ 是否为 $AX=b$ 的解.
(3) 求方程组的通解.

4. (15 分) 设
$$\alpha_1=(2,1,-3), \alpha_2=(3,2,-5), \alpha_3=(1,-1,1)$$
$$\beta_1=(2,0,-1), \beta_2=(0,0,1), \beta_3=(-1,0,0)$$
且 $\mathscr{A}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上的线性变换，满足 $\mathscr{A}(\alpha_i)=\beta_i, i=1,2,3$.
(1) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 下的矩阵;
(2) 记 $\xi=(2,-1,1)$, 求 $\xi, \mathscr{A}(\xi)$ 在基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 下的坐标.

5. (20 分) 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$，求正交矩阵 Q 和对角线元素均为正数的上三角矩阵 R 使得 $A=QR$.

6. (10 分) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为三维向量空间 $\mathbb{R}^3$ 的一组规范正交基，记
$$A=3\alpha_1\alpha^T+\alpha_2\alpha^T-6\alpha_3\alpha_3^T$$
求 A 的特征值和特征向量。

7. 问答题 (50 分，前两题各 15 分，第三题 20 分)

(1) 设 $f(x)$ 为整系数多项式, α 为整数, 证明: $(\alpha-1) \mid f(1)$ 当且仅当 $(\alpha-1) \mid f(\alpha)$.

(2) 设 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 上的矩阵, 其中 $\mathbb{F}$ 是数域，且 $A^2 = A$, 证明

(i) $x \in \mathbb{F}^n$ 属于 A 的列向量构成子空间当且仅当 $Ax = x$.

(ii) 记 $W_1 = \{x \in \mathbb{F}^n \mid Ax = 0\}, W_2 = \{x \in \mathbb{F}^n \mid Ax = x\}$, 则 $\mathbb{F}^n = W_1 \oplus W_2$;

(3) 设 $\mathbb{R}^{n\times m}$ 为实数域上的 $n \times m$ 矩阵空间，A, B 分别是 $n \times n, m \times m$ 实矩阵 ($A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{m\times m}$), 且 σ 为 $\mathbb{R}^{n\times m}$ 上的变换, 满足 $\sigma(x) = Ax + xB, \forall x \in \mathbb{R}^{n\times m}$, 证明:

(i) σ 是 $\mathbb{R}^{n\times m}$ 的线性变换;

(ii) B, B^T 有相同的特征值;

(iii) 若 λ, μ 分别为 A, B 的特征值，则 $\lambda + \mu$ 是 σ 的特征值.

29 南昌大学 2024 年数学分析试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日上午 8:30-11:30)

微信公众号：八一考研数学竞赛

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 150 分

1. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{2024}\left(1-\cos\frac{1}{n^2}\right)n^3}{\sqrt{1+n^2}-n}$.

2. 计算定积分 $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos^2 x e^x \mathrm{d}x$.

3. 计算曲线积分

$$\oint_C \frac{y}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x+\left(4x+\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)\mathrm{d}y$$

其中曲线 C 为 $A(1,0)$ 到 $B(-1,0)$ 的上半圆周，方向为逆时针.

4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上二阶可导，证明：存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f(a)+f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)$$

5. 已知 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^3+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，求 $f(x,y)$ 的偏导数, 并讨论在 $(0,0)$ 处的可微性.

6. 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ 的和.

7. 讨论级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{\alpha+\frac{1}{n}}}$ $(\alpha>0)$ 的敛散性.

8. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n=\sin x_{n-1}, n=1,2\cdots$，且 $0<x_0<\dfrac{\pi}{2}$，证明:(1) 数列 $\{x_n\}$ 收敛且极限为 0；(2) 试求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n}{3}}x_n=1$.

9. 计算 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x^2}-e^{-2x^2}}{x}\mathrm{d}x$.

10. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 连续，在 $[a,+\infty)$ 上可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

11. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续, $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 连续, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$, 证明：$g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

30　南昌大学 2024 年高等代数试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日下午 2:00-5:00)

微信公众号：八一考研数学竞赛

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 150 分

1. 已知 $f(x)=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}$，证明：$f(x)\mid[f(x)+x^n]^2-x^n$.

2. 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1^2-2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2-2 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_nx_1 & x_1x_2 & \cdots & x_n^2-2 \end{vmatrix}$$

3. 设 $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})(i=1,2,\cdots,s)$，且方程组满足

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0 \end{cases}$$

的解满足 $b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0$ 的解，记 $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，证明：$\beta$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出.

4. 已知 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ 是 n 级正定矩阵，证明:

(1) $a_{ii}>0(i=1,2,\cdots,n)$

(2) $2\left|a_{ij}\right|<a_{ii}+a_{jj},(i\neq j)$.

(3) A 的所有元素中绝对值最大的元素一定在主对角线上.

5. 若 A 是 n 阶方阵，证明：(1) $A^n=0$ 当且仅当 A 的特征值全为 0；(2) 若 $A^n=0$，则 $|A+E|=1$.

6. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n},n\geq 2$ 的矩阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，证明：$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$.

7. 设二次型 $f\,(x_1x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$，问：

(1) 当 t 为何值时，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 正定；

(2) 当 $t=1$ 时，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 对应矩阵 A 的最小多项式 $m_A(\lambda)$.

8. 已知 $A=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$，求 A^{100}.

9. 设矩阵 A 的特征多项式 $f(\lambda)=(\lambda+1)^3(\lambda-2)^2(\lambda+3)$，最小多项式 $m(\lambda)=(\lambda+1)^2(\lambda-2)(\lambda+3)$，求：(1) A 的所有不变因子；(2) A 的若尔当标准型.

10. 设 A 为 n 阶非零实矩阵，$n\geq 3$，且 $A^T=A^*$，证明：(1) $|A|>0$；(2) A 为正交矩阵.

31 山东大学 2024 年数学分析试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日上午 8:30-11:30)

微信公众号：八一考研数学竞赛

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 150 分

一、(60 分) 计算题

1. 讨论函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x+(-1)^n\cdot n}{x^2+n^2}$ 的条件收敛域、绝对收敛域、一致收敛域.

2. 计算第一类曲面积分
$$\iint_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S$$
其中曲面 Σ 是左半球面 $x^2+y^2+z^2=1, y\leq 0$.

3. 比较下列无穷大量
(1) x 与 $(\ln x)^{100}(x\to+\infty)$
(2) $(\ln x)^{100}$ 与 $\mathrm{e}^{(\ln x)^{\frac{1}{100}}}(x\to+\infty)$

4. 计算含参积分 $I(a)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan ax}{x\left(1+x^2\right)}\mathrm{d}x\,(a>0)$.

二、(60 分) 证明题

1. 设函数列 $f_n(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^x}$ 在 $(1,4)$ 内闭一致收敛, 证明: $f_n(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上一致收敛.

2. (1) 证明：不等式成立 $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$
(2) 证明：数列 $\{a_n\}$ 极限存在, 其中 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n$

3. 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 证明: $\displaystyle\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x$, 并求
$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin^{2n}x}{\sin^{2n}x+\cos^{2n}x}\mathrm{d}x$$

三、(30 分) 证明及分析题

1. 设函数 $z=z(x,y)$ 满足方程 $F\left(x+\dfrac{z}{y},y+\dfrac{z}{x}\right)=0$, 求 $z-x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

2. 设二元连续可微函数 F 在直角坐标下可写为 $F(x,y)=g(y)f(x)$, 在极坐标系中可写为 $F(r\cos\theta,r\sin\theta)=h(r)$, 若 $F(x,y)$ 无零点, 求 $F(x,y)$.

32 山东大学 2024 年高等代数试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日下午 2:00-5:00)

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 150 分

一. 线性代数.

1. (15 分) 考虑齐次线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + bx_3 + \cdots + bx_n = 0; \\ bx_1 + ax_2 + bx_3 + \cdots + bx_n = 0; \\ \cdots\cdots \\ bx_1 + bx_2 + bx_3 + \cdots + ax_n = 0. \end{cases}$$

其中 $a \neq 0, b \neq 0, n \geq 2$. 试讨论 a, b 取何值时, 方程组仅有零解? 有无穷多解? 并在有无穷多解时, 用基础解系给出其通解.

2. (15 分) 设 A, B, C 分别为 $m \times n, n \times t, s \times m$ 阶矩阵.

(1) 若矩阵 A 的秩 $r(A) = r$, 证明: 存在可逆阵 P, Q, 使得 PA 的后 $m - r$ 行全为零, AQ 的后 $n - r$ 列全为零.

(2) 利用 (1) 证明: 若 $r(A) = n$, 则 $r(AB) = r(B)$; 若 $r(A) = m$, 则 $r(CA) = r(C)$.

3. (10 分) 设 A 为 n 阶正定矩阵, α 为 n 维实的列向量, 证明: A^{-1} 与 $A + \alpha\alpha^T$ 均为正定矩阵, 其中 A^{-1} 为 A 的逆矩阵, α^T 为 α 的转置.

4. (15 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & b & -c \\ -b & 0 & a \\ c & -a & 0 \end{pmatrix}$ 为实矩阵, 令 $B = A^2 + qA + E$, 其中 $q = a^2 + b^2 + c^2, E$ 为三阶单位阵. 试问: 当且仅当 q 为何值时, 矩阵 B 是正交矩阵?

5. (15 分) 设 A, B 为 3 阶复方阵, 且都只有一个特征值 λ_0. 证明: A 与 B 相似的充要条件是

$$\dim\left(V_{\lambda_0}(A)\right) = \dim\left(V_{\lambda_0}(B)\right).$$

6. (20 分) 设 V 是 n 维欧氏空间, W_1, W_2 是 V 的子空间, 且 $\dim W_1 = s < \dim W_2 = t$, 证明:

(1) 存在 $\beta \in W_2, \beta \neq 0$, 而 $(\beta, W_1) = 0$, 且 $\dim\left(W_1^{\perp} \cap W_2\right) \geq t - s$.

(2) $\dim\left(W_1 + W_2^{\perp}\right) \leq n - t + s$.

二. 常微分方程.

1. (10 分) 求方程 $\left(y + x^3 y + 2x^2\right) \mathrm{d}x + \left(x + 4xy^4 + 8y^3\right) \mathrm{d}y = 0$ 的通解.

2. (10 分) 求方程 $\left(y'\right)^3 + y^3 - 3yy' = 0$ 的通解.

3. (10 分) 试证：若 $y = \varphi(x)$ 是方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(x)\sin y$ 的满足初试条件 $\varphi(0) = 0$ 的解, 则 $\varphi(x) \equiv 0$, 其中 $p(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续.

4. (20 分) 设 $t > 0, x, y$ 是关于 t 的函数, 解方程组

$$\begin{cases} tx' - x - y = 0 \\ ty' + x - y = 0. \end{cases}$$

5. (10 分) 是否存在 $\mathbb{R}$ 上连续函数 p, q, 使得微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, x \in \mathbb{R}$ 有两个解 $\phi(x) = \sin x, \psi(x) = xe^x, x \in \mathbb{R}$?

33　上海大学 2024 年数学分析试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日上午 8:30-11:30)

微信公众号：八一考研数学竞赛

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 150 分

1. (10 分) 叙述函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A\in\mathbb{R}$ 的 $\varepsilon-\delta$ 定义. 利用函数极限的定义来证明 $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-4}{x}=0$.

2. (10 分) 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lambda>1$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

3. (10 分) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$ 与 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$.

4. (10 分) 讨论函数 $y=\sin(\sin x)$ 与 $y=x\cos x$ 在 $[0,+\infty)$ 上的一致连续性并给出证明.

5. (10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $4\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=1$, 证明: 存在 $\xi\in[0,1]$, 使得 $f(\xi)=\xi^3$.

6. (10 分) 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{n+1}$ 的收敛半径, 收敛域与和函数, 并求如下级数和

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n+1)2^n}$$

7. (10 分) 求空间曲线 $\begin{cases} x^2+y^2=2z; \\ x^2+y^2+xy=1. \end{cases}$ 上的点到 xOy 平面的最大与最小距离.

8. (10 分) 设 A,B 为有界数集且 $A\cap B\neq\emptyset$, 证明: $\sup(A\cap B)\le\min\{\sup A,\sup B\}$, 并给出等号不成立的例子.

9. (10 分) 设 $f(x)\ge 0$ 在 $[0,+\infty)$ 上可微, $f(0)=0,\left|f'(x)\right|\le f(x)$. 证明: 在 $[0,+\infty)$ 上 $f(x)\equiv 0$.

10. (10 分) 讨论函数 $z=f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^4}, & x^2+y^2\neq 0; \\ 0, & x^2+y^2=0. \end{cases}$ 在原点 $(0,0)$ 的连续性, 可偏导性及可微性, 并给出证明.

11. (10 分) 讨论反常积分 $\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x$ 与 $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^2\sqrt{\ln x}}\mathrm{d}x$ 的敛散性并给出证明.

12. (10 分) 将函数 $f(x)=1-x^2(0\le x\le\pi)$ 展开成余弦级数, 并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和.

13. (10 分) 求第二类曲面积分

$$\iint_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 S 是球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$, 并取外侧.

14. (10 分) 计算曲线积分

$$I=\int_L \left(\mathrm{e}^x\sin y-2x-2y\right)\mathrm{d}x+\left(\mathrm{e}^x\cos y-x\right)\mathrm{d}y.$$

其中 L 为从 $A(0,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 到 $B(2,0)$ 的一段有向弧.

15. (10 分) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1]$ 上连续且 $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 证明:

$$\exists\{x_n\}\subset(-\infty,-1], \text{s.t.} \lim_{n\to\infty} x_n=-\infty, \lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right)=0$$

若函数 $g(x):(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 可导, 证明: 存在趋于正无穷大的正数列 $\{x_n\}$, 使得 $g'\left(x_n\right)<g\left(2x_n\right), n=1,2,\cdots$.

34 上海大学 2024 年高等代数试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日下午 2:00-5:00)

考试形式: 闭卷　　考试时间: 180 分钟　　满分: 150 分

一、填空题.

1. 设 α 为 n 维单位实列向量, I 为单位矩阵, 则 $\left|2I-\alpha\alpha^T\right|=$______.
2. 设非零矩阵 A 的秩 $r(A)=p$, 且 $A^2=A$, 则 $r(A-I)+r(A+I)=$______.
3. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关, 且
$$\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3,\beta_2=2\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3,\beta_3=3\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3.$$
则 β_1,β_2,β_3 的极大线性无关组为______.
4. 设 $A=\begin{pmatrix}1&3&a\\2&2&b\\0&0&5\end{pmatrix}$, 其中 a,b 为常数. 设线性空间 $V=\left\{B\in\mathbb{C}^{3\times3}\mid AB=BA\right\}$, 则 V 的维数为______.
5. 设 A,B 为 n 阶实可逆矩阵, 且 A 为对称矩阵, 则实对称矩阵 $\begin{pmatrix}A&B\\B^T&O\end{pmatrix}$ 的正负惯性指数差为______.

二、是非题. 若错误, 请举出反例; 若正确, 请给出相应理由.

1. 多项式 $x^4+x^3+x^2+x+1$ 在有理数域上不可约.
2. 设 A 是 n 阶矩阵, 齐次线性方程组 $AX=0$ 有唯一解的充分必要条件是 $|A|=0$.
3. 设 A,B,C,D 为 n 阶矩阵, 则 $\begin{vmatrix}A&B\\C&D\end{vmatrix}=|AD-CB|$.
4. 欧氏空间上对称变换在任意一组基下的矩阵为实对称矩阵.
5. 设四阶矩阵
$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\-1&-1&0&0\\-2&-2&2&1\\1&1&-1&0\end{pmatrix}$$
则 A 的初等因子为 $\lambda,\lambda,(\lambda-1)^2$.

三、解答题.

1. 设 $A=\begin{pmatrix}3&0&0&0\\2&3&0&0\\2&2&3&0\\2&2&2&3\end{pmatrix}$, 且 $AB=B+I$, 求矩阵 B^n, 其中 n 为整数.

2. 设 $n(n>1)$ 阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

求 A^{-1}.

3. 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=1 \\ x_1+3x_2-x_3-x_4=0 \\ 3x_1+8x_2+\left(a^2-5a+7\right)x_3+ax_4=1. \end{cases}$$

其中 a 为常数.

4. 设 a 为整数, 且二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_3x_3$$

有三个不同整数特征值, 用正交变换将此二次型化为标准形 (需要写出正交变换及标准形).

5. 设 A 为数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶矩阵, $p(x)$ 为 $\mathbb{F}$ 上首 1 不可约多项式. 若存在正整数 r 使得 A 在 $\mathbb{F}$ 上最小多项式为 $p^r(x)$, 求矩阵 $P=\begin{pmatrix} A & I \\ O & A \end{pmatrix}$ 的最小多项式.

6. 设 V 是有限维复空间, $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 是 V 上的两个线性变换, 满足 $\mathscr{A}\mathscr{B}-\mathscr{B}\mathscr{A}=\mathscr{A}^2-\mathscr{A}$. 对于任意复数 μ, 定义 V 的子空间 V_μ 如下:

$$V_\mu=\{\alpha\in V\mid \exists m\in \mathrm{N}^*,\mathrm{s.t.}(\mathscr{A}-\mu I)^m\alpha=0\}.$$

其中 I 为恒等变换.

(1) 求证: V_μ 是 $\mathscr{B}$ 的不变子空间;

(2) 若 $V_\mu\neq\{0\}$, 求证 $\mu=0$ 或者 1 .

35 西安交通大学 2024 年数学分析试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日上午 8:30-11:30)

微信公众号：八一考研数学竞赛

考试形式: 闭卷 考试时间: 180 分钟 满分: 150 分

一、填空题 (每题 6 分, 共 60 分).

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}=$______.
2. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\ln n-[\ln n])=$______.
3. 若 $f(x)=x+\ln x, g(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数, 求 $g''(x)=$______.
4. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n!}=$______.
5. 若 $f(x)=|x|^{\alpha}$, 求 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}+\cdots+\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}=$______.
6. 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$, 求在 $(0,0)$ 处 $(\cos\alpha,\sin\alpha)'$ 的方向导数 $=$______.
7. 求不定积分 $\displaystyle\int\sin(\ln x)\mathrm{d}x=$______.
8. 求 $x^2+y^2=2az$ 和 $x^2+xy+y^2=a^2$ 交线的最大值为______.
9. 若 D 是由 $(0,0,1),(0,1,1),(1,1,1),(0,0,2),(0,2,2),(2,2,2)$ 组成的 $\mathbb{R}^3$ 的一个棱台, 则 $\displaystyle\iint_D\frac{1}{y^2+z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$______.
10. 计算曲面积分 $\displaystyle\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}x\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$______, 其中 $S:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leq 1$, 方向外侧.

二、解答题 (每题 15 分, 共 90 分).

1. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{mn}\leq x_m+x_n, x_n>0$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}$ 存在.
2. 证明: $\lim\limits_{\substack{h\to 0^+,\\ k\to 0^+}}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-k)}{k+h}$ 存在的充要条件为 f 在 x_0 处可导.
3. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=A,\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=B$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n=AB$, 其中 $c_n=a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1=\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_{n-k+1}$.
4. 若 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 是一个 C^1 类映射, 且满足 $xf'(x)=0$, 证明: f 为常值映射.
5. 若 f 在 $[a,b]$ 上连续, 则 f 在 $[a,b]$ 上有界.
6. 证明:

$$\frac{1}{T}\int_0^T\frac{\sin at\cos bt}{t}\mathrm{d}t=\begin{cases}1+o\left(\dfrac{1}{T(a-b)}\right) & a>b\\ o\left(\dfrac{1}{T(a-b)}\right) & a<b.\end{cases}$$

36　南京师范大学 2024 年数学分析试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日上午 8:30-11:30)

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 150 分

1. (20 分，每小题 5 分)

(1) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)$.

(2) 已知 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-f'(x)\right)=2023$，求 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

(3) 计算 $\displaystyle\int_0^a x^2\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\mathrm{d}x$.

(4) 将 $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}}^{x}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}f(x,y)\mathrm{d}y$ 转换成先对 x 积分再对 y 积分.

2. (15 分) 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛于 a，则

(1) 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{na_1+(n-1)a_2+\cdots+a_n}{n}$;

(2) 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}=0$.

3. (15 分) 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且对 $\forall x,y\in\mathbb{R}$ 满足函数方程 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，证明：$f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，且 $f(x)=f(1)x$.

4. 若 $f(x)$ 二阶可微，且 $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=0, x\in[a,b]$，证明

$$|f''(\xi)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$$

5. (20 分) (1) 证明柯西不等式, 若 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则有

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\leq\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数, 且 $f(0)=0$. 证明:

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\leq\frac{1}{2}\int_0^1\left|f'(x)\right|^2\mathrm{d}x$$

6. (15 分) 已知 $f(x)$ 单调递减, 且 $f(x)>0$, 证明: $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)\sin^2 x\mathrm{d}x$ 同敛散.

7. (25 分) (1) 若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 附近有定义且

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-xy^2}{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}=1$$

判断 $f(0,0)$ 是否是 $f(x,y)$ 的极值，并请说明是极大值还是极小值，若不是极值请说明理由.

(2) 设 $u=u(x,y,z)$，令

$$x=r\sin\varphi\cos\theta, y=r\sin\varphi\sin\theta, z=r\cos\varphi$$

且 $xu'_x+yu'_y+zu'_z=0$，证明：u 仅为 φ 和 θ 的函数.

8. (15 分) 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-\alpha)^n n!}{n^n}, \alpha>0$ 的敛散性；若收敛说明是条件收敛还是绝对收敛.

9. (15 分) 计算第一型曲面积分

$$\iint_S (x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

其中 S 为 $x^2+y^2=z^2(0\le z\le h)$ 外法向与 z 轴正方向夹角为锐角.

10. (10 分) 证明：$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos x^2}{x^y}\mathrm{d}x$ 在 $(-1,1)$ 上内闭一致收敛.

37 南京师范大学 2024 年高等代数试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日下午 2:00-5:00)

考试形式: 闭卷 考试时间: 180 分钟 满分: 150 分

1. 设 $f(x)$ 是一个整系数多项式,$\dfrac{p}{q}$ 是 $f(x)$ 的有理根且 $(p,q)=1$, 证明: 存在任意整数 m, 使得 $pm-q \mid f(m)$.

2. 叙述并证明艾森斯坦判别法.

3. 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a+x_1 & a+x_1^2 & \cdots & a+x_1^n \\ a+x_2 & a+x_2^2 & \cdots & a+x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \\ a+x_n & a+x_n^2 & \cdots & a+x_n^n \end{vmatrix}$.

4. 设非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-1 \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1 \\ ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1 \end{cases}$ 有三个线性无关的解.

   (1) 证明: 该方程组的系数矩阵 A 的秩 $r(A)=2$

   (2) 求 a,b 的值并求方程组的通解.

5. 若 A 为 n 阶方阵，$A+E$ 可逆, 且有 $f(A)=(E-A)(E+A)^{-1}$, 证明:

   (1) $(E+f(A))(E+A)=2E$;

   (2)$f(f(A))=A$.

6. 设 A 为实对称矩阵,E 为单位矩阵, 求证: 存在一个极小数 ε , 使得 $E+\varepsilon A$ 为正定阵.

7. 若 W,W_1,W_2 是线性空间 V 的子空间,$W_1\subseteq W$, $V=W_1\oplus W_2$, 证明:

$$\dim W=\dim W_1+\dim(W_2\cap W)$$

8. 设 V 是全体次数不超过 n 的实系数多项式, 再添上零多项式组成的实数域上的线性空间，定义 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ ，任给 $f(x)\in V$, 有 $\mathscr{A}(f(x))=xf'(x)-f(x)$.

   (1) 求 $\mathscr{A}$ 的核 $\mathscr{A}^{-1}(0)$ 和值域 $\mathscr{A}V$;

   (2) 证明: $V=\mathscr{A}^{-1}(0)\oplus\mathscr{A}V$.

38　湖南师范大学 2024 年数学分析试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日上午 8:30-11:30)

微信公众号：八一考研数学竞赛

考试形式: 闭卷　　考试时间: 180 分钟　　满分: 150 分

一、填空题 (每题 6 分, 共 60 分)

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sin\left(\dfrac{n+1}{n}\pi\right)+\sin\left(\dfrac{n+2}{n}\pi\right)+\cdots+\sin\pi\right)=$ ________.

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\sin t\,\mathrm{d}t}{\sin x-\tan x}=$ ________.

3. 设 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$, 则 $f^{(n)}(0)=$ ________.

4. 不定积分 $\displaystyle\int|x|\mathrm{d}x=$ ________.

5. 求 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x)^2\left(1+x^{2024}\right)}\mathrm{d}x=$ ________.

6. 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2x^n$ 的和函数为 ______.

7. 若 $xyz\mathrm{e}^{x+y+z}=1$, 则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ ______.

8. 若广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(x^2\right)}{x^p}\mathrm{d}x$ 绝对收敛, 则 p 的取值范围为 ______.

9. 设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 则二重积分 $\displaystyle\iint_D[x+y]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ______ , 其中区域 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 3,0\le y\le 3\}$.

10. 求曲面积分 $\displaystyle\iint_S(x+y+z)\mathrm{d}S=$ ______ , 其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2,z\ge 0$.

二、计算题 (每题 15 分, 共 60 分)

1. 函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 附近有定义, 且在 $x=1$ 处可导, 已知 $f(1)=0$, $f'(1)=2$, 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(\sin^2x+\cos x\right)}{\mathrm{e}^{x^2}-1}$.

2. 设 $D=\left\{(x,y):x^2+y^2\le 1\right\}$, 计算二重积分 $\displaystyle\iint_D\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{(1-x)^2+y^2}}$.

3. 求曲线积分
$$I=\int_L\left(\mathrm{e}^x+1\right)\cos y\mathrm{d}x-\left[\left(\mathrm{e}^x+x\right)\sin y-x\right]\mathrm{d}y$$
其中 L 为点 $A(2,0)$ 沿着曲线 $y=\sqrt{4-x^2}$ 到点 $B(-2,0)$ 的有向曲线段.

4. 将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1-x}{1+x}$ 展开成 x 的幂级数, 并求级数 $\sum\limits_{x=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

三、证明题 (每题 10 分, 共 30 分)

1. 若函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$. 求证

$$\left[\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\right]^2\leq\frac{1}{12}\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$$

2. 证明: 函数 $f(x)=\sqrt{x}\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续.

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(x)>0$, 记 $F(x)=\int_a^b f(t)|x-t|\mathrm{d}t$. 证明: $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上有唯一的极小值点.

39 苏州大学 2024 年数学分析试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日上午 8:30-11:30)

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 150 分

一. 计算题. 每题 10 分, 共 20 分.

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\arctan x}{x^3}$.
2. 设 $f(x)=x^3\cos x$, 求 $f^{(2023)}(0)$.

二. (15 分) 设 $a_1=1$, 且当 $n\geq 2$ 时, $a_n=\dfrac{1}{2}\left(a_{n-1}+\dfrac{5}{a_{n-1}}\right)$. 证明: $\{a_n\}$ 收敛, 并求极限.

三. (15 分) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0;\\ 1, & x=0.\end{cases}$ 证明: 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

四. (15 分) 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 $\Omega=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\big||x|+|y|+|z|\leq 1\right\}$.

五. (15 分) 设 $u=f(x,y,z)$ 的所有二阶偏导数都连续, $v=f(x(s,t,r),y(s,t,r),z(s,t,r))$, 其中

$$\begin{cases} x(s,t,r)=\dfrac{1}{9}(ax+4t+8r)\\ y(s,t,r)=\dfrac{1}{9}(4s+bt-4r)\\ z(s,t,r)=\dfrac{1}{9}(8s-4t+cr).\end{cases}$$

试讨论是否存在常数 a,b,c, 使得当 $x=x(s,t,r), y=y(s,t,r), z=z(s,t,r)$ 时, 总成立

$$\left(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}\right)\big|_{(x,y,z)}=\left(v_{ss}+v_{tt}+v_{rr}\right)\big|_{s,t,r}.$$

若存在, 求 a,b,c 的值.

六. (10 分) 设 $u(x,y,z)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}+\dfrac{z^2}{4}$, 求在原点处函数 u 增长最快的方向.

七. (10 分) 证明不等式: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

八. (10 分) 设函数 f 在 $[0,1]$ 上二阶可导, $f(0)=0, f(1)=1$, 并存在 $c\in(0,1)$, 使得 $f(c)>c^2$. 证明: 至少存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f''(\xi)<2$.

九. (10 分) 设 f 是 $[0,+\infty)$ 上无界的连续函数. 问: $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 是否发散? 给出证明或反例.

十. (10 分) 设 $\{f_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上黎曼可积的函数列, 且 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f. 证明:

(1) f 在 $[a,b]$ 上可积.

(2) $\{F_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $F(x)$, 其中 $F_n(x)=\int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t, F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

十一. (10 分) 设 u 是平面开区域 D 上的二元函数, 且所有的偏导数连续. 证明: u 是 D 上的调和函数, 即在 D 上 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\equiv 0 \Longleftrightarrow$ 对 D 内任意圆周 L, 有 $\oint_L \frac{\partial u}{\partial n}=0$, 其中 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 表示 u 在 L 上的外法向导数.

十二. (10 分) 证明: 存在 $\xi\in(0,\pi)$, 使得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\xi}{n\ln^2(n+2)}=0$.

40　苏州大学 2024 年高等代数试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日下午 2:00-5:00)

微信公众号：八一考研数学竞赛

考试形式: 闭卷　　考试时间: 180 分钟　　满分: 150 分

1. 求三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-3&-3&3\\-2&-2&2\end{pmatrix}$ 的 Jordan 标准型, 并计算 $C(A)=\{B:AB=BA\}$ 的维数.

2. 证明：$\operatorname{rank}A=\max\limits_{1\le i\le n}\{\operatorname{rank}A_i\}$ 的充要条件是 $Ax=\beta$ 有解, 其中 $\beta\neq 0, A_i$ 是 A 的第 i 列替换为 β 后的矩阵.

3. 已知 B 是二阶可逆矩阵, 若矩阵 A 满足 $AB=-BA$, 则 A^2 是纯量矩阵.

4. 设 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 为 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 上的线性变换，且 $\mathscr{A}$ 有特征值 μ, 满足

$$(\mathscr{A}(\alpha),\mathscr{B}(\beta))=(\mathscr{A}(\alpha),\beta)+(\alpha,\mathscr{B}(\beta)),\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}^n$$

证明: $\mu\neq 1$ 且 $\mathscr{B}$ 有特征值 $\dfrac{\mu}{\mu-1}$.

5. 设 Q 为 n 阶对称正定阵, x 为 n 维实列向量. 证明:

$$0\le x^{\mathrm{T}}\left(Q+xx^{\mathrm{T}}\right)^{-1}x<1.$$

6. (1) 求 $\begin{pmatrix}\cos\alpha&1&&&\\1&2\cos\alpha&1&&\\&1&2\cos\alpha&\ddots&\\&&\ddots&\ddots&1\\&&&1&2\cos\alpha\end{pmatrix}$ 的行列式.

   (2) 证明: $n\ge 3$ 时, $\dfrac{1}{\pi}\arccos\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 是无理数.

7. 设 V 为数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间，$\mathscr{A}$ 为 V 中的线性变换.

   (1) 证明: 存在 V 中的线性变换 $\mathscr{B}$ 使得, $\ker\mathscr{B}=\operatorname{Im}\mathscr{A},\operatorname{Im}\mathscr{B}=\ker\mathscr{A}$.

   (2) 在 (1) 的条件下, 证明: $\mathscr{A}^2=\mathscr{A}\Leftrightarrow\mathscr{B}^2=\mathscr{B}$.

41　华南理工大学 2024 年数学分析试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日上午 8:30-11:30)

微信公众号：八一考研数学竞赛

考试形式: 闭卷　　考试时间: 180 分钟　　满分: 150 分

1. (13 分) 已知 $a,b>0$, 且 $c=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4}{\ln(1+x)}-\dfrac{4}{x}\right)$, 定义函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(ax)}{x}, & x<0;\\ c, & x=0;\\ (1+bx)^{\frac{1}{x}}, & x>0.\end{cases}$$

若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内处处连续, 求常数 a,b 和 c.

2. (13 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导. 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$f(\xi)+f'(\xi)=\frac{\mathrm{e}^b f(b)-\mathrm{e}^a f(a)}{\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^a}.$$

3. (13 分) 证明函数

$$f(x,y)=\begin{cases}xy\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

在点 $(0,0)$ 连续且偏导数存在, 但是偏导数在点 $(0,0)$ 不连续, 而 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 可微.

4. (13 分) 将方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 变换为极坐标形式.

5. (14 分) 计算曲线积分 $\displaystyle\int_L y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$, 其中 L 是曲线

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=1, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0, a>0, b>0, c>0\text{常数}$$

从点 $(a,0,0)$ 到 $(0,0,c)$.

6. (14 分) 证明：黎曼 zeta 函数 $\zeta(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上连续且无穷次可微.

7. (14 分) 解答如下问题:

(1) 用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$ 不存在.

(2) 证明：数列 $\{x_n\}$ 极限存在, 其中

$$x_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right), n=1,2,\cdots.$$

并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

8. (14 分) 设函数 $f(x)$ 在 (x_0-r,x_0+r) 上无穷次可导 (其中 $r\in(0,+\infty)$), 且存在常数 $M>0$, 使得

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\le M\frac{n!}{r^n},\forall x\in(x_0-r,x_0+r),\forall n=0,1,2,\cdots.$$

(1) 证明: $f(x)$ 在 x_0 点的 Taylor 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 在 (x_0-r,x_0+r) 上逐点收敛于 $f(x)$.

(2) 证明: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 在 (x_0-r,x_0+r) 上内闭一致收敛于 $f(x)$.

9. (14 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积, 证明:

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos(\lambda x)\mathrm{d}x=0.$$

10. (14 分) 证明 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{x}\mathrm{d}x$ 关于 y 在 $[y_0,+\infty)$ $(y_0>0)$ 上一致收敛, 但在 $(0,+\infty)$ 上非一致收敛.

11. (14 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上分段连续, 即存在 $[a,b]$ 的一个有限分割 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ (其中 n 为固定整数), 使得 $f(x)$ 在每个区间 (x_{i-1},x_i) 上连续且分点 x_i 处都存在左右极限. 证明: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积.

42　华南理工大学 2024 年高等代数试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日下午 2:00-5:00)

考试形式: 闭卷　　考试时间: 180 分钟　　满分: 150 分

1. (20 分) 设 $(f(x), g(x)) = 1$, 证明: $f^2(x) + g^2(x)$ 的重根必是 $\left[f'(x)\right]^2 + \left[g'(x)\right]^2$ 的根.

2. (15 分) 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a & a+b & \cdots & a+b & a+b \\ a-b & a & \cdots & a+b & a+b \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a-b & a-b & \cdots & a & a+b \\ a-b & a-b & \cdots & a-b & a \end{vmatrix}.$$

3. (20 分) 若 A 为 $m \times n$ 矩阵, β 为 n 维列向量. 考虑下列两个线性方程组

$$\text{(a) } AX = \beta; \text{ (b) } \begin{pmatrix} A' \\ \beta' \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(1) 当 (a) 有解时, (b) 有解吗? 证明你的结论.

(2) 当 (a) 无解时, (b) 有解吗? 证明你的结论.

4. (20 分) 设矩阵 A, B, C 满足 $AC = CB$, 证明: A, B 均为方阵. 若 $r(C) = r$, 证明: A, B 的特征多项式有 r 次公因式.

5. (20 分) 解答如下问题:

(1) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = X'AX$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

将 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 化为一次因式的乘积.

(2) 根据 (1) 的结果, 将 n 元二次型 $f(X) = X'AX$ 化为一次因式的乘积, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n-1 \end{pmatrix}.$$

6. (20 分) 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -a-1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & a+2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

在复数域上不可对角化.

(1) 求 a 的值;

(2) 对每个 a, 求出 A 的若尔当标准型.

7. (20 分) 设 $\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\cdots,\mathscr{A}_m$ 为 n 维线性空间 V 上的 m 个线性变换, 且满足:

(1) $\mathscr{A}_i^2=\mathscr{A}_i, i=1,2,\cdots,m$.

(2) $\mathscr{A}_i\mathscr{A}_j=\mathscr{O}, \forall i\neq j$.

(3) $\mathscr{A}_1^{-1}(0)\cap\mathscr{A}_2^{-1}(0)\cap\cdots\cap\mathscr{A}_m^{-1}(0)=\{0\}$.

证明: $V=\mathscr{A}_1(V)\oplus\mathscr{A}_2(V)\oplus\cdots\oplus\mathscr{A}_m(V)$.

8. (15 分) 定义在 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 上的内积 $(\ ,\ )$ 满足

$$(AC,B)=(A,CB),\forall A,B,C\in\mathbb{R}^{n\times n}$$

证明: 存在常数 $c>0$, 使得 $(A,B)=c\operatorname{tr}(AB)$.

43 安徽大学 2024 年数学分析试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日上午 8:30-11:30)

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 150 分

1. (15 分) 计算极限.

(1) (7 分) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\dfrac{1^2+3^2+\cdots+(2n+1)^2}{n^3}-\dfrac{4}{3}\right]$.

(2) (8 分) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]^x$.

2. (15 分) 设数列 $\{x_n\}$ 有界, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$. 令

$$m=\varliminf_{n\to\infty} x_n, M=\varlimsup_{n\to\infty} x_n, m<M$$

证明：在区间 (m,M) 上任意一个数都是此数列的一个子列的极限.

3. (20 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 令

$$\omega_f(\delta)=\sup_{\substack{x,y\in I\\|x-y|<\delta}}|f(x)-f(y)|$$

证明:

(1) $\lim\limits_{\delta\to0^+}\omega_f(\delta)$ 存在.

(2) $f(x)$ 在区间 I 上一致连续等价于 $\lim\limits_{\delta\to0^+}\omega_f(\delta)=0$.

4. (20 分) 设函数 $f(x)$ 为 (a,b) 上的凸函数, 即对 $\forall x_1,x_2\in(a,b)$ 以及 $\lambda\in(0,1)$, 有

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2).$$

证明:

(1) 对 $\forall x\in(a,b)$, 左右导数 $f'_-(x),f'_+(x)$ 均存在, 且 $f'_-(x)\le f'_+(x)$.

(2) $f'_-(x),f'_+(x)$ 均在 (a,b) 上单调递增.

5. (20 分) 设 $f(n)=a_0+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{a_k}{n^k}$, 且满足 $|a_k|\le M$, 这里 n,k 均为正整数. 试证: 数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ 收敛的充要条件为 $a_0=a_1=0$.

6. (20 分) 给定方程 $x^2+y+\sin(xy)=0$.

(1) 说明在点 $(0,0)$ 的充分小的邻域内, 此方程确定唯一的可导的函数 $y=y(x)$, 使得 $y(0)=0$, 并求出 $y=y(x)$ 的导函数表达式.

(2) 判断在点 $(0,0)$ 的充分小的邻域内, 此方程是否确定唯一的函数 $x=x(y)$, 使得 $x(0)=0$, 说明理由.

7. (20 分) 计算 Gauss 曲面积分 $I=\iint_S \frac{\cos(\widehat{n,r})}{r^2}\mathrm{d}S$, 其中 S 为光滑封闭曲面, 原点不在 S 上, r 为 S 上动点至原点的距离, $(\widehat{n,r})$ 为动点处外法向量 n 与径向 r 的夹角.

8. (20 分) 求含参积分 $I(y)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\cos(2xy)\mathrm{d}x$.

44 安徽大学 2024 年高等代数试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日下午 2:00-5:00)

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 150 分

一 . 填空题 (本大题共六小题, 每小题 5 分, 共 30 分).

1. 设

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&2&1\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&2\end{pmatrix}.$$

若矩阵满足 $AXB=C$, 则 $X=$______.

2. 设 $A=\left(a_{ij}\right)$ 为 2 阶复方阵, 满足 $\operatorname{tr}\left(A^k\right)=k(k=1,2,)$, 其中 $\operatorname{tr}(A)=a_{11}+a_{22}$ 为矩阵 A 的迹, 则行列式 $|A|=$______.

3. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2&1&1&1\\-1&-1&0&1\\0&0&-1&0\\-1&1&1&0\end{pmatrix}$, 则 A 的最小多项式为______.

4. 设 n 阶矩阵 A 的各行元素之和均为 3, E 为单位阵, 则矩阵 A^2-2A+E 的各行元素之和为______.

5. 设 $\mathbb{R}^3$ 为带标准内积的 3 维欧氏空间, 对 $\mathbb{R}^3$ 的基 $\alpha_1=(-1,1,1),\alpha_2=(0,-1,1),\alpha_3=(0,0,1)$ 所 Schmidt 正交化得 $\mathbb{R}^3$ 的标准正交基 β_1,β_2,β_3, 则 $\beta_3=$______.

6. 设 λ-矩阵

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}(\lambda-1)^3&&\\&(\lambda+1)^2&\\&&(\lambda-1)^2(\lambda+1)^4\end{pmatrix}.$$

则 $A(\lambda)$ 的所有不变因子为______.

二 . 辨析题 (本大题共四小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 先判断对错, 再简要说明).

7. 设 $f(x)$ 为实系数多项式, 且次数为奇数, 则 $f(x)$ 必有实根.

8. 设 A,B 都为 4 阶复方阵, 则 A 与 B 相似当且仅当 A 与 B 有相同的特征多项式, 且每个特征值的几何重数 (即对应特征子空间的维数) 也相同.

9. 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维复线性空间 V 上的线性变换, $n>1$, 若 $\mathscr{A}^n=0$ 且 $\mathscr{A}^{n-1}\neq 0$, 则存在两个 $\mathscr{A}$ 的非平凡子空间 U 和 W, 使得 $V=U\oplus W$.

10. 设 $A(\lambda),B(\lambda)$ 都是数域 $\mathbb{P}$ 上 $m\times n$ 的 λ 矩阵, 则 $A(\lambda),B(\lambda)$ 等价的充要条件为 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 有相同的初等因子组.

三 . 计算题 (本大题共五小题, 每小题 10 分, 共 50 分).

11. 设 $A=\left(a_{ij}\right)$, 其中 $a_{ij}=\dfrac{1-x_i^n y_j^n}{1-x_i y_j}, x_i y_j \neq 1, i, j=1,2,\cdots,n$, 求行列式 $|A|$.

12. 设多项式

$$f(x)=2x^4+2x^3-5x^2-13x-2, g(x)=x^3+x^2-3x-6.$$

求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的首一最大公因式 $(f(x), g(x))$ 以及多项式 $u(x)$ 与 $v(x)$, 使得

$$u(x) f(x)+v(x) g(x)=(f(x), g(x)).$$

13. 设 A 是 5×4 矩阵, 且 $r(A)=3, \beta$ 为 5 维非零列向量. 已知 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 为方程组 $AX=\beta$ 的 3 个不同的解, 且 $\gamma_1+\gamma_2=(2,2,0,2)^T, \gamma_1+\gamma_3=(0,0,2,0)^T$. 求 $AX=\beta$ 的通解.

14. 设复二次型

$$f\left(x_1, x_2, x_3\right)=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$$

求非退化线性替换 $X=CY$, 将二次型 $f\left(x_1, x_2, x_3\right)$ 化为规范形, 其中 $X=\left(x_1, x_2, x_3\right)^T, Y=\left(y_1, y_2, y_3\right)^T$, 并写出规范形.

15. 设实矩阵

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(1) 求 A 的若尔当标准形 J.

(2) 求可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP=J$.

四. 证明题 (本大题共四小题, 第 16,17 题每题 10 分, 第 18,19 题每题 15 分, 共 50 分).

16. 设多项式 $f(x)=x^p+px+p-1$, 其中 p 为奇素数. 证明: $f(x)$ 在有理数域上不可约.

17. 设 n 元实二次型 $f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)=l_1^2+\cdots+l_s^2-l_{s+1}^2-\cdots-l_{s+t}^2$, 其中

$$l_i=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n, a_{ij} \in \mathbb{R}, i=1,2,\cdots,s+t, j=1,2,\cdots,n.$$

证明: $f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$ 的正惯性指数 $p \leq s$.

18. 设 $\mathscr{A}$ 为 n 维欧氏空间 V 上的线性变换, 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的矩阵为 A. 证明: $\mathscr{A}$ 为对称变换的充要条件是 $A^T G=GA$, 其中 $G=\left(\alpha_i, \alpha_j\right)$ 为基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的度量矩阵.

19. 设 A 为 n 阶复方阵, 0 为 A 的最小多项式 $m(\lambda)$ 的 r 重根, $r \geq 2$ 为正整数. 证明:

(1) 对任意的正整数 $k \geq r$, $r\left(A^k\right)=r\left(A^r\right)$.

(2) $r\left(A^r\right)<r\left(A^{r-1}\right)$.

45　湘潭大学 2024 年数学分析试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日上午 8:30-11:30)

考试形式: 闭卷　　考试时间: 180 分钟　　满分: 150 分

1. (15 分) (30 分) 计算下列极限：

   (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$; (3) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}$.

2. (20 分)(1) 设 $y=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$, 求 d^2y;

   (2) 设 $I(y)=\displaystyle\int_y^{y^2}\frac{\cos xy}{x}\mathrm{d}x$, 求 $I'(y)$.

3. (15 分) 计算 $I=\displaystyle\iiint_\Omega(x+y+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$, 其中 Ω 是 $x^2+y^2+z^2=3$ 与 $2z=x^2+y^2$ 围成的区域.

4. (15 分) 若 S 为光滑封闭曲面,l 是任意常向量，证明：$I=\displaystyle\iint_S\cos(n,l)\mathrm{d}\sigma$，其中 n 是曲面 S 的外法线向量.

5. (20 分) 讨论下列含参变量反常积分的一致收敛性: $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\sin x\mathrm{d}x$, 在 (i) $\alpha\geq\alpha_0>0$; (ii) $\alpha>0$.

6. (15 分) 叙述 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 存在且有限的柯西收敛准则并证明.

7. (15 分) 将 $f(x)=x^2$ 在 $[0,2\pi]$ 上傅里叶级数展开.

8. (20 分) 设

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x},E(x)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{p_n^x}{p_n^x-1},x>1$$

   其中 $p_n(n=1,2,\cdots)$ 为素数序列. 试证明：(1) $\zeta(x),E(x)$ 均收敛;(2) $\zeta(x)=E(x)$.

46　西南大学 2024 年数学分析试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日上午 8:30-11:30)

考试形式: 闭卷　　考试时间: 180 分钟　　满分: 150 分

1. 叙述题. 每题 5 分, 共 15 分.

   (1) 函数极限的柯西收敛准则.

   (2) 函数 $f(x)$ 在区间 I 上不一致连续的定义.

   (3) 函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 的归结原则.

2. 计算题. 每题 5 分, 共 15 分.

   (1) 求不定积分 $\displaystyle\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x$.

   (2) 求极限 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}\right]^{\frac{1}{x}}$.

   (3) 设 f 具有二阶连续的偏导数, 且 $z=f\left(x^2y^2, xy\right)$, 求 z_{xy}.

3. (15 分) 设有界函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的不连续点的全体为 $\{x_n \mid n=1,2,\cdots\}$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$, 证明: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

4. (15 分) 设数列 $\{a_n\}$ 严格递减, 且 $a_n>0$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ 的充要条件是级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ 发散.

5. (15 分) 已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶可导, 且 $f''(x)\le 0$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=2$, 证明: $f(x)\le 4x$.

6. (15 分) 利用闭区间套定理证明确界原理.

7. (15 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续, 恒正且单调递减, 记
$$a_n=\sum_{k=1}^{n} f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x$$
   证明: 数列 $\{a_n\}$ 收敛.

8. (15 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续, $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$, 证明: $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

9. (15 分) 证明: 半径为 R 的球的体积为 $\dfrac{4\pi R^3}{3}$.

10. (15 分) 计算曲线积分
$$\int_L y\ \mathrm{d}x+z\ \mathrm{d}y+x\ \mathrm{d}z$$
   其中 L 是 $x^2+y^2+z^2=1$ 和 $x+y+z=1$ 的交线, 从 x 轴正向看去取逆时针方向.

47 西南大学 2024 年高等代数试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日下午 2:00-5:00)

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 150 分

1. (20 分) 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a+x_1 & a+x_1^2 & \cdots & a+x_1^n \\ a+x_2 & a+x_2^2 & \cdots & a+x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+x_n & a+x_n^2 & \cdots & a+x_n^n \end{vmatrix}.$$

2. (20 分) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, 求 A^{2024}.

3. (20 分) 设 A 是一个二阶实对称矩阵, A 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=3$. 并设 $\alpha=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是属于特征值 $\lambda_1=2$ 的特征向量, 求矩阵 A.

4. (20 分) 请问 a,b 取什么值时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ 2x_1+x_2-4x_5=a; \\ x_1+2x_2+3x_3+3x_4+7x_5=4; \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=b. \end{cases}$$

有解, 并求其解.

5. (20 分) 设 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 是一个整系数多项式, 且 $ac+bc$ 是奇数. 证明: $f(x)$ 在有理数域上不可约.

6. (20 分) 设 $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$ 是一个 n 元实二次型. 证明: 存在 n 元正定二次型 $g\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$ 和 n 元负定二次型 $h\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$ 使得

$$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=g\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)+h\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right).$$

7. (15 分) 设 σ 为 n 维线性空间 V 上的线性变换, λ 为 σ 的一个特征根, k 为 λ 的代数重数. 记

$$W=\operatorname{Ker}\left(\lambda I_V-\sigma\right)^k.$$

其中 I_V 足 V 上的恒等变换. 证明: W 的维数恰为 k.

8. (15 分) 解答如下问题:

(1) 设 V 为数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, W 为集合, f 为 V 到 W 的双射. 证明: W 也可以做成数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间;

(2) 自然数集是否可以构成有理数域上的 2 维线性空间? 请说明理由.

48 上海交通大学 2024 年高等代数试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日下午 2:00-5:00)

微信公众号：八一考研数学竞赛

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 150 分

1. (10 分) 已知复数域上不可约多项式均为一次多项式.

   (1) 证明：实数域上正次数多项式均为一次或二次多项式乘积;

   (2) 证明: 有理数域上存在任意次数不可约多项式.

2. (20 分) 设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶矩阵, 证明:

   (1) 若 A 与所有对角阵可交换 $\Leftrightarrow$ A 是对角阵;

   (2) 若 A 与所有矩阵可交换 $\Leftrightarrow$ A 是纯量阵.

3. (20 分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}^n$ 线性无关. 判断: $\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \cdots, \alpha_{n-1}+\alpha_n$, $\alpha_n+\alpha_1$ 线性无关性 $(n \geq 3)$.

4. (20 分) 设 $V=\mathbb{R}[X]_n$ 为次数小于 n 的全体实系数多项式构成的实线性空间, $f'(x)$ 表示 $f(x)$ 的导数. 定义 $\mathscr{A}: f(x) \rightarrow x f'(x)-f(x)$.

   (1) 证明 $\mathscr{A}$ 为线性变换;

   (2) 求 $\mathscr{A}$ 的特征值与特征向量, $\operatorname{Ker} \mathscr{A}, \operatorname{Im} \mathscr{A}$;

   (3) 判断是否有 $\operatorname{Ker} \mathscr{A} \oplus \operatorname{Im} \mathscr{A}$.

5. (20 分) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$,

   (1) 求 A 的 Jordan 标准型;

   (2) 设 $k \in \mathbb{N}_{+}$, 求 A^k 的 Jordan 标准型;

   (3) 设 $B=\begin{pmatrix}A & A \\ A & A\end{pmatrix}$, 求 B 的 Jordan 标准型.

6. (20 分) 设 A 的 n 阶可逆方阵.

   (1) 证明: 存在正交阵 Q 和方阵 D, 使得 $Q^T A A^T Q=D^2$;

   (2) 求 A 的奇异值分解.

7. (20 分) 若矩阵 A 满足 $A=A^T=A^2$, 则称 A 为投影矩阵 $\Leftrightarrow$ 存在列满秩矩阵 B, 使得 $A=B\left(B^T B\right)^{-1} B^T$.

8. (20 分) 设 $\mathscr{A}$ 为 n 维线性空间 V 上的线性变换.

   (1) 证明: 存在 $1 \leq k \leq n$, 使 $V / \operatorname{Im}\left(\mathscr{A}^k\right) \cong \operatorname{Ker}\left(\mathscr{A}^k\right)$;

   (2) 研究满足 (1) 中最小的 k.

49 大连理工大学 2024 年数学分析试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日上午 8:30-11:30)

微信公众号：八一考研数学竞赛

考试形式: 闭卷　　考试时间: 180 分钟　　满分: 150 分

一. 简答题. 每题 6 分, 共 60 分.

1. 用数学语言描述 $\{a_n\}$ 不是基本列.
2. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{2x}=0$, 则 $f'(0)=0$. 此结论是否成立? 为什么?
3. 设 $0<a<b$, 证明不等式 $\dfrac{2a}{a^2+b^2}<\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}$.
4. 已知 $a_n=\sqrt[n]{2022^n+(-2023)^n}, n=1,2,\cdots$, 求 $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ 和 $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.
5. 当 $x\to x_0$ 时, $\alpha=o(1)$. 证明: $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}-\mathrm{e}=-\dfrac{e}{2}\alpha+o(\alpha), x\to x_0$.
6. 证明: $\sin\left(x^2\right)$ 在 $\mathbb{R}$ 上不一致连续.
7. $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续可微, $g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}, & x\neq y;\\ f'(x), & x=y.\end{cases}$ 证明: $g(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续.
8. 设 a,b 为正常数, 求由 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2x+18y$ 所围成的面积.
9. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\cot x}{x}\right)$.
10. 证明: 含参量反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sqrt{y}\mathrm{e}^{-yx^2}\mathrm{d}x$ 在 $y\in(0,+\infty)$ 上不一致收敛.

二. 计算题. 每题 10 分, 共 30 分.

1. 已知 $y=f(x,t)$, 其中 t 是由 $F(x,y,t)=0$ 确定的关于 x,y 的隐函数, f 和 F 有连续的一阶偏导数, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.
2. 设 C 是 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 与 $x=y$ 交线, 方向由 $\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\dfrac{a}{\sqrt{2}},0\right)$ 到 $\left(-\dfrac{a}{\sqrt{2}},-\dfrac{a}{\sqrt{2}},0\right)$. 计算
$$\int_C\left(z^3+3x^2y\right)\mathrm{d}x+\left(x^3+3y^2z\right)\mathrm{d}y+\left(y^3+3z^2x\right)\mathrm{d}z.$$
3. 求曲线 $\begin{cases}x+y-z=2;\\ z^2=x^2+y^2\end{cases}$ 上距离原点最近的点.

三. 证明题. 每题 12 分, 共 60 分.

1. 证明: $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^6\sin^2 x}\mathrm{d}x$ 收敛.

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上存在三阶连续导数, $f(0)=f(1)=f(2)=0$. 证明: 对任意的 $x\in(0,2)$, 存在 $\xi\in(0,2)$, 使得

$$f(x)=\frac{1}{6}x(x-1)(x-2)f'''(\xi).$$

3. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微, 求证:

$$\max_{x\in[a,b]}f(x)\leq\frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|+\int_a^b\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x.$$

4. 证明: $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\sin\left(2^n x\right)}{n!}$ 在 $\mathbb{R}$ 上有任意阶导数, 但不能在 $\mathbb{R}$ 上展开为幂级数.

5. 设 $a_n\neq 0, n=1,2,\cdots$, $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(1-\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)=p>1$, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛.

50　大连理工大学 2024 年高等代数试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日下午 2:00-5:00)

考试形式: 闭卷　　考试时间: 180 分钟　　满分: 150 分

一. 计算题. 每题 10 分, 共 30 分.

1. 已知 $\alpha_1=(1,2,1,0),\alpha_2=(-1,1,1,1),\alpha_3=(0,3,2,1)$, V_1 是由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 生成的空间, $\beta=(2,-1,0,1),\beta_2=(1,-1,3,7)$, V_2 是由 β_1,β_2 生成的空间. 求 V_1+V_2 及 $V_1\cap V_2$ 的维数与基.

2. 设 V 是 3 维欧氏空间, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 V 的一组基, 且这组基的度量矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&2&0\\1&0&4\end{pmatrix}.$$

求 V 的一组标准正交基 (用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 表示).

3. 设矩阵 A 的特征多项式为 $f(\lambda)=(\lambda-2)^3(\lambda-3)^2$, 若不计若尔当块的排列顺序, 求 A 的所有可能的若尔当标准形.

二. 简答题. 每题 10 分, 共 80 分.

1. 设 $f(x),g(x)$ 不全为零, 证明: 对任意正整数 n, 都有 $(f^n(x),g^n(x))=(f(x),g(x))^n$.

2. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为矩阵 $A_{n\times n}$ 的 n 个列向量, $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$, 且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 线性相关. 证明: 线性方程组 $AX=\beta$ 有无穷多解.

3. 设 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 为整系数多项式, 且 $(a+b)c$ 为奇数. 证明: $f(x)$ 在有理数域上不可约.

4. 设 $\mathscr{A}$ 是线性空间 V 上的线性变换, $\operatorname{Im}\mathscr{A}=\{\mathscr{A}\xi\mid\xi\in V\}$, $\operatorname{Ker}\mathscr{A}=\{\xi\mid\mathscr{A}\xi=0,\xi\in V\}$. 证明: $\operatorname{Im}\mathscr{A}^2=\operatorname{Im}\mathscr{A}$ 当且仅当 $\operatorname{Ker}\mathscr{A}^2=\operatorname{Ker}\mathscr{A}$.

5. 已知实矩阵 A 满足 $A^2=A$. 证明: 存在实对称矩阵 B 及正定矩阵 C, 使得 $A=BC$.

6. 设 $f(x),g(x)$ 为数域 $\mathbb{P}$ 上的多项式, 且满足 $(f(x),g(x))=1$. 设 V,V_1,V_2 分别是 $f(A)g(A)X=0$, $f(A)X=0,g(A)X=0$ 的解空间. 证明: $V=V_1\oplus V_2$.

7. 设 $\mathscr{A}$ 为有限维线性空间 V 上的线性变换, 且 $\mathscr{A}$ 为可逆线性变换, W 是 V 的子空间. 证明: 若 W 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间, 则 W 也是 $\mathscr{A}^{-1}$ 的不变子空间.

8. 设 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 分别是 n 维线性空间 V 上的两个线性变换, $\mathscr{A}$ 有 n 个不同的特征值. 证明: $\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B}\mathscr{A}$ 的充要条件是存在多项式 $f(x)$, 使得 $\mathscr{B}=f(\mathscr{A})$.

三. 综合题. 每题 20 分, 共 40 分.

1. 已知 X, Y 为三维列向量, $A=\left(a_{ij}\right)$ 为 3 阶实对称矩阵.

(1) (10 分) 对任意的实数 a, 证明: $\begin{vmatrix} a & X^T \\ Y & A \end{vmatrix} = a|A| - X^T A^* Y$.

(2) (10 分) 已知 A 的所有特征值的和为 $1, A$ 的所有特征值的积为 -12 , 且 $(1,0,-2)^T$ 为 $(A^*-4E)X = 0$ 的解. 对于下列四元二次型, 用正交替换化为标准形.

$$f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right)=\begin{vmatrix} x_1^2 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -x_2 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -x_3 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -x_4 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2. 对于 n 阶实矩阵 A 及任意的 n 维列向量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$, 且 $X_n \neq 0$, 满足

$$AX_1 = X_2, AX_2 = X_3, \cdots, AX_{n-1} = X_n, AX_n = 0.$$

证明:

(1) (8 分) $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 线性无关.

(2) (8 分) 求 A 的所有特征值及特征向量.

(3) (4 分) A 是否可以对角化? 为什么?

51 福州大学 2024 年数学分析试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日上午 8:30-11:30)

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 150 分

1. $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x, n\geq 1$, 证明:

   (1) 数列 $\{a_n\}$ 收敛;

   (2) 当 $n\geq 2$ 时有 $\frac{1}{2(n+1)}\leq a_n\leq\frac{1}{2(n-1)}$.

2. 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, $f'(0)=f'(1)=0$, 证明: $\exists\xi\in(0,1)$ 使得

$$\left|f''(\xi)\right|\geq 4|f(1)-f(0)|.$$

3. 判断级数 $\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{8}-\frac{1}{11}+\cdots$ 的敛散性, 若收敛, 求级数的值.

4. 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 证明

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\leq\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x,$$

   且取等条件是当且仅当存在常数 α,β 使得 $\alpha f(x)=\beta g(x)$.

5. 计算第二型曲线积分 $\int_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$, 其中 $L: x^3+y^3=xy(x,y\geq 0$, 逆时针方向).

6. 计算单位时间内某流体 $\vec{V}=yz\vec{j}$ (密度为 1) 通过曲面 S 的流量, 其中 S 是椭球面 $x^2+\frac{y^2}{4}+z^2=1$.

7. 计算 $I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}}{x}\cos x\mathrm{d}x$.

52 福州大学 2024 年高等代数试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日下午 2:00-5:00)

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 150 分

一. 填空题.

1. 若 a, b, c 是线性空间上的一组基，$ta+b, tb+c, tc+a$ 也是一组基的充要条件是 t 满足______.

2. 若 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, r(B)=2$, 且 $AB=O$, 则 $a=$______.

3. 设 A, B 均为可逆矩阵, $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1}=$______.

4. 设 A 为 n 阶矩阵, $r(A)=m$, 线性变换 φ 在基 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 下的矩阵为 A, 且 $AX=0$ 的解空间维数为 m, 则 $\dim(\operatorname{Im}\varphi)=$______.

5. 若 $f\left(x_1, x_2, \cdots, x_{2n}\right)=\sum_{i=1}^{n} x_i x_{2n+1-i}$, 二次型的符号差为______.

二. 简答题.

6. 已知 $a_{1k}=1(k=1,2,\cdots,2024), a_{2s}=1(s=1,2,\cdots,1012), a_{2m}=-1(m=1013,\cdots,2024)$, 且 $|A|=2024$, A 为 2024 阶方阵, 求 $\sum_{k=1}^{1012} A_{1k}, \sum_{s=1013}^{2024} A_{1s}$.

7. 若 $A_{3\times 2}, B_{2\times 3}, AB$ 的特征多项式为 $\lambda^3-3\lambda^2+2\lambda$, 求 BA 的特征多项式.

8. 设 e_1, e_2 为空间的一组基, 线性变换 φ, v 满足

$$\varphi\left(e_1\right)=\beta_1, \varphi\left(e_2\right)=\beta_2, \psi\left(e_1+e_2\right)=\beta_1+\beta_2, \psi\left(e_1-e_2\right)=\beta_1-\beta_2.$$

证明: $\varphi=\psi$.

9. 忘了.

10. A 是一个给定的三阶方阵 (具体数值忘了), 求 A 的不变因子, 初等因子, Jordan 标准形.

三. 综合题.

11. 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y \\ z & x & y & \cdots & y \\ z & z & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

12. 设 A 为 n 阶方阵, 证明: $A = BC$, 其中 B 为可逆矩阵, C 为对称矩阵. 该分解唯一吗? 若唯一, 请证明; 若不唯一, 请说明理由.

13. 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 且 A 有三个不同的特征值, $\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0, \beta = 4\alpha_1 + 5\alpha_2 + 6\alpha_3$, 求 $AX = \beta$ 的通解.

14. 设 $\sigma^2 = 3\sigma$, 证明: $V = W_1 \oplus W_2$, 其中 $W_1 = \{\alpha \in V \mid \sigma\alpha = 0\}, W_2 = \{\alpha \in V \mid \sigma\alpha = 3\alpha\}$.

15. 设 A 为三阶实对称矩阵, A 的每行元素之和为 4 , 且 $(A - E)X = 0$ 有两个线性无关的解, 求 A.

16. 定义

$$w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^T, \|w\| = \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + \cdots + w_n^2} = 1$$

定义 $H = E - 2ww^T$.

(1) 证明: H 为对称矩阵, 且为正交矩阵.

(2) 若 $\|x\| = \|y\|$, 证明: 存在镜面反射 H, 依得 $H(x) = y$.

17. 设 A 为数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 阶矩阵, $g(x)$ 为其最小多项式. $f(x) \in P[x], (f(x), g(x)) = d(x)$.

(1) 证明: $r(f(A)) = r(d(A))$.

(2) 证明: $f(A)$ 可逆当且仅当 $(f(x), g(x)) = 1$.

18. 若 B 为 n 阶正定矩阵, A 为 n 阶矩阵, 且 $r(A) = r$, 证明: $r\begin{pmatrix} B & A \\ A^T & O \end{pmatrix} = n + r$.

53 中国矿业大学 2024 年数学分析试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日上午 8:30-11:30)

考试形式: 闭卷 考试时间: 180 分钟 满分: 150 分

1. (15 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, $f(a)=f(b)$, 且 ${f_+}'(a)\cdot {f_-}'(b)>0$, 证明: 在 (a,b) 存在一个数 ξ, 使得 $f(\xi)=f(a)$.

2. (15 分) 叙述并证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ 的归结原则.

3. (15 分) 叙述有限覆盖定理和致密性定理, 并用有限覆盖定理证明致密性定理.

4. (15 分) 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}-\cot x\right)$.

5. (15 分) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可积函数, 证明: $f(x)g(x)$ 也是 $[a,b]$ 上的可积函数.

6. (15 分) 求积分 $I=\displaystyle\int_0^1 tg(t)\mathrm{d}t$, 其中 $g(t)=\displaystyle\int_{t^2}^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

7. (15 分) 求 $f(x)=\operatorname{sgn} x$ 在区间 $(-\pi,\pi)$ 上的傅里叶展开式, 并说明其一致收敛性.

8. (15 分) 设 $\alpha>0$, 证明：级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^{2+\alpha}}$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛, 并且其和函数 $S(x)$ 的导函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

9. (15 分) 若二元函数组 $\begin{cases} u=f(x,y) \\ v=g(x,y)\end{cases}$ 为点集 D 从 xOy 平面映射到 uOv 平面的点集 E 的表达式, 且函数 $f(x,y),g(x,y)$ 是点集 D 上的一致连续函数, $h(u,v)$ 是点集 E 上的一致连续函数, 证明: 复合函数 $h(f(x,y),g(x,y))$ 是点集 D 上的一致连续函数.

10. (15 分) 若 $I(\alpha)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}\mathrm{d}x$, 其中 $\beta>0$ 为常数.

    (1) 证明：$I(\alpha)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续;

    (2) 证明：$I(\alpha)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导, 并求出 $I(\alpha)$ 的表达式;

    (3) 运用 $I(\alpha)$ 的表达式, 求 $J(\beta)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}\mathrm{d}x$ 的值.

54 中国矿业大学 2024 年高等代数试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日下午 2:00-5:00)

微信公众号：八一考研数学竞赛

考试形式: 闭卷 考试时间: 180 分钟 满分: 150 分

一. 填空题 (每小题 4 分, 共 40 分)

1. 若 1 是多项式 Ax^4+Bx^2+1 的二重根, 则 $A=$, $B=$______.

2. 设 A 是 3 阶方阵, $|A|=-2$, 把它按列分块成 (A_1,A_2,A_3), 则方阵 $(A_3-A_1,3A_2,A_1)$ 的行列式的值为______.

3. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\4&k&3\\3&-1&1\end{pmatrix}$, B 为三阶非零矩阵, 且 $AB=O$, 则 $k=$______.

4. 设 A 为 n 阶可逆矩阵 $(n\geq 2)$, 交换 A 的第 1 行与第 2 行得到 B, 则______.

A. 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得到 B^*

B. 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得到 B^*

C. 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得到 $-B^*$

D. 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得到 $-B^*$

5. 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 为 4 阶方阵, 其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 分别是 A 的列向量, 且 $|A|=0$, A 的代数余子式 $A_{12}\neq 0$, A^* 是 A 的伴随矩阵, 则方程组 $A^*X=0$ 有一个基础解系是

6. 当 t 满足条件______ 时, 二次型 $f=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3+2tx_2x_3$ 是正定的.

7. 设 $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, 则与 A 乘积可交换的三阶方阵组成的线性空间的维数是______.

8. 已知 σ 为 n 维欧式空间 V 上的线性变换, 且 $\sigma^2=0$, 则 σ 的像空间的维数不超过______.

9. 设 $A=\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\end{pmatrix}$, 则 A 的 2024 次方幂是______.

10. 已知 V 是 n 维欧式空间, 定义 V 上内积为向量的数量积, 则欧式空间 V 上的柯西-布涅柯夫斯基不等式的一般形式为______.

二. (10 分) 已知 $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ 是 $n-1$ 个两两不同的数, 请将 $f(x)$ 分解成不可约一次多项式的乘积, 并求出 $f(x)$ 的根, 其中

$$f(x)=\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \ldots & x^{n-1} \\ 1 & a_1 & {a_1}^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & {a_2}^2 & \ldots & {a_2}^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & a_{n-1} & {a_{n-1}}^2 & \ldots & {a_{n-1}}^{n-1} \end{vmatrix}.$$

三. (10 分) 假设 $f(x)$ 是复数域上的非零 n 次多项式, 且 $f(x)$ 的一阶微商 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 只有非零根, 若 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \mid xf(x)$, 证明: $f(x)$ 是一个一次因式的 n 次方幂.

四. (10 分) 设 $A=\left(a_{ij}\right), B=\left(b_{ij}\right)$ 是两个 n 阶方阵, 证明: 矩阵方程 $AX=B$ 有解的充分必要条件是 $n+1$ 个矩阵 $A, A_1, A_2, \ldots, A_n$ 有相同的的秩, 其中

$$A_k=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_{1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_{nk} \end{pmatrix}, \quad k=1,2,\ldots,n.$$

五. (15 分) 假设实二次型 $f(X)=X^TAX$ 满足 $X^TAX=0$ 当且仅当 $X=0$, 证明: 二次型 $f(X)=X^TAX$ 或者为正定二次型, 或者为负定二次型.

六. (10 分) 设 G 是数域 F 上一些 n 阶可逆方阵的集合, 对 G 中任意两个不同的矩阵 A, B, 都有 $|A+B|=0$. 设 $X=\lfloor x_{ij} \rfloor$ 是由 n^2 个字母 x_{ij} 组成的 n 阶方阵, 对每一个 $A \in G$, 定义多项式 $f_A(X)=|X+A|$.

(1) (5 分) 证明: 集合 $\{f_A(X): A \in G\}$ 的任意个有限子集都是线性无关的;

(2) (5 分) 证明: 集合 G 是有限的.

七. (15 分) 设矩阵 $A=\alpha\beta^T$, 其中 $\alpha, \beta \in R^n (n \geq 2), \alpha \neq 0, \beta \neq 0$. 证明:

(1) (5 分) α 以及与 β 正交的非零向量 ξ 都是矩阵 A 的特征向量;

(2) (5 分) 若 α 与 β 不正交, 则矩阵 A 可对角化;

(3) (5 分) 若 α 与 β 正交, 则矩阵 A 不可对角化.

八. (15 分) 设 α 是 $n(n \geq 1)$ 维欧式空间 V 中的单位向量, 定义 V 上的线性变换:

$$\sigma(\beta)=\beta-(\alpha,\beta)\alpha.$$

(1) (5 分) 证明: 线性变换 σ 是正交变换 (称这种变换为 V 上的镜面反射);

(2) (5 分) 证明: 线性变换 σ 是第二类的 (即行列式为 -1);

(3) (5 分) 若上述 V 上的线性变换 τ 以 1 为特征值, 且属于特征值 1 的特征子空间的维数是 $n-1$, 证明: τ 是 V 上的镜面反射.

55　东北大学 2024 年数学分析试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日上午 8:30-11:30)

微信公众号：八一考研数学竞赛

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 150 分

1. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x}{x+1}-\ln(1+x)}{x^2}$.

2. 设 $f(x)=\int_x^1 \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y$ 求 $\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x$.

3. 计算幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\left(n^2-n+1\right)}{2^n}$ 的值.

4. 计算曲面积分 $I=\iint_{\Sigma}(xy+yz+xz)\mathrm{d}S$，其中 Σ 是 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2ax$ 所截的部分 $(a>0)$.

5. 设 $0\le\alpha\le 1$，证明：$f(x)=x^{\alpha}$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

6. 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\dfrac{x}{n}\right)$ 在 $[-a,a]$ (a 为有限数) 上一致收敛.

7. 设数列 $\{x_n\}$ 有界且 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{2n}+2x_n)$ 存在, 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

8. 讨论级数 $\sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\dfrac{1}{i}$ 的绝对收敛性和条件收敛性.

9. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上连续的单调递增函数, 证明

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\ge\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

10. 设函数 $f(x)$ 满足条件：1) $-\infty<a\le f(x)\le b<\infty, a\le x\le b$；2) 存在常数 $L\in(0,1)$ 使得

$$|f(x)-f(y)|\le L|x-y|, \forall x,y\in[a,b]$$

若对 $\forall x_0\in[a,b]$，令 $x_n=f(x_{n-1})(n=1,2,\cdots)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi\in[a,b]$，且 $f(\xi)=\xi$.

56 东北大学 2024 年高等代数试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日下午 2:00-5:00)

微信公众号：八一考研数学竞赛

考试形式: 闭卷　　考试时间: 180 分钟　　满分: 150 分

1. (15 分) 设有两个向量组

$$(\mathrm{I}): \alpha_1 = (1,0,2)^T, \alpha_2 = (1,1,3)^T, \alpha_3 = (1,-1,a+2)^T;$$
$$(\mathrm{II}): \beta_1 = (1,2,a+3)^T, \beta_2 = (2,1,a+b)^T, \beta_3 = (2,2,a+2)^T.$$

讨论当 a 为何值时, 向量 (I) 和 (II) 等价? 当 a 为何值时, 向量组 (I) 能由向量组 (II) 线性表出, 但向量组 (II) 不能由向量组 (I) 线性表出?

2. (15 分) 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ b & x & a & \cdots & a \\ b & b & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

3. (15 分) 设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1+\lambda_1 x_2)^2 + (x_2+\lambda_2 x_3)^2 + (x_3+\lambda_3 x_1)^2$.

   (1) (5 分) 当 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 满足什么条件时, $f(x_1,x_2,x_3)$ 是正定二次型?

   (2) (10 分) 若 $f(x_1,x_2,x_3)$ 经过正交线性替换可化为标准形 $y_1^2+y_2^2+y_3^2$, 求 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的值.

4. (15 分) 设 $f(x) = a + bx$ 是有理数域上的一元多项式, $\alpha = (1,1,\cdots,1)^T$ 和 $\beta = (-1,-1,\cdots,-1)^T$ 是 n 维列向量. 令 $J = \beta\alpha^T, A = f(J)$.

   (1) (5 分) 求 J 的全部特征值和属于每个特征值的全部特征向量.

   (2) (10 分) A 是否能相似于一个对角矩阵? 如果能, 求一个可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵, 并写出这个对角矩阵.

5. (15 分) 已知

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

   分别在有理数域和复数域上讨论矩阵 A 是否可对角化? 并说明理由.

6. (15 分) 设 V 是 $\mathbb{R}$ 上所有二阶矩阵构成的线性空间, V 上的两组基为

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$
$$B_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

定义 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 为

$$\mathscr{A}(X)=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & -6\end{pmatrix}X, X\in V.$$

(1) (5 分) 求基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 到 $B_{11},B_{12},B_{21},B_{22}$ 的过渡矩阵.

(2) (10 分) 求线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $B_{11},B_{12},B_{21},B_{22}$ 下的矩阵.

7. (15 分) 设 $f(x)=(x-k_1)(x-k_2)\cdots(x-k_n)+1$, 其中 $k_1,k_2,\cdots,k_n(n>2)$ 是互异的整数. 证明:

(1) (5 分) 多项式 $f(x)$ 在复数域上可约.

(2) (10 分) 若多项式 $f(x)$ 在有理数域上可约, 则 n 必为偶数, 且 $f(x)$ 必能表示成某个整系数多项式的平方.

8. (15 分) 设 A 为 n 阶正定矩阵, 证明: 存在下三角矩阵 B, 使得 $A=BB^T$.

9. (15 分) 证明如下问题:

(1) (5 分) $n\times n$ 数字矩阵 A 的特征矩阵是满秩矩阵, 但不是可逆矩阵.

(2) (10 分) $n\times n$ 数字矩阵 A 是可逆矩阵的充要条件是 A 的最后一个不变因子 $d_n(\lambda)$ 有非零常数项.

10. (15 分) 设 A 为 n 阶方阵, 且 $A^3-5A^2+4A=O$. 证明:

$$\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}\left(A^2-A\right)+\operatorname{rank}\left(A^2-4A\right)$$

57 中国海洋大学 2024 年数学分析试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日上午 8:30-11:30)

微信公众号：八一考研数学竞赛

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 150 分

1. 计算题.

(1) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\cos x\right)$.

(2) 利用 $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}^+$, 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}$.

(3) 已知 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}=\frac{\pi}{2}$, 计算 $\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^2\,\mathrm{d}x(\alpha>0)$.

2. 判断题. 须加以说明

(1) 判断正误: 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的非负函数, 且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$. 则在 $[a,b]$ 上一定存在非空开区间使得 f 恒为零.

(2) 设 $f_n(x)=x^n-x^{3n}, 0\le x\le 1$, 判断函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上的收敛.

(3) 判断正误: 在 $[0,1]$ 上存在函数, 使得在每个有理点处连续, 但在每个无理点处不连续.

(4) 设 $a_n>0$ 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+n^2a_n}$ 的敛散性.

3. 证明题.

(1) 设 $f(x)$ 为 $U_-^\circ(x_0)$ 上的单调有界函数, 证明 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 存在.

(2) 叙述并证明拉格朗日中值定理.

4. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(0)=f(1)$, 证明: 对任何正整数 n, 必存在相应的 $\xi\in(0,1)$, 使得

$$f\left(\xi+\frac{1}{n}\right)=f(\xi).$$

5. 设 $f(x)$ 为 $[0,+\infty)$ 上正值单调减少函数, 且 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 证明:

$$\lim_{h\to 0^+}h\sum_{n=1}^{\infty}f(nh)=\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$$

6. 计算第二类曲线积分

$$I-\int_L\frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

其中 L 是从点 $A(-1,0)$ 到点 $B(1,0)$ 的一条在 x 轴上侧且不通过原点的光滑曲线.

7. 求函数 $f(x,y,z)=x^4+y^4+z^4$ 在条件 $xyz=1$ 下的极值, 并判断该极值是极大值还是极小值? 为什么?

8. 计算三重积分

$$\iiint_{\omega} z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \mathrm{d}z$$

其中 ω 是球面 $x^2+y^2+z^2=8$ 的上半部分与抛物面 $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$ 所围立体.

58 中国海洋大学 2024 年高等代数试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日下午 2:00-5:00)

微信公众号：八一考研数学竞赛

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 150 分

1. 设 $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ 是数域 $\mathbb{P}$ 上的多项式, 证明:
$$x^3+x^2+x+1 \mid x^2 f_1\left(x^4\right)+x f_2\left(x^4\right)+f_3\left(x^4\right)$$
当且仅当 $(x-1) \mid f_i(x), i=1,2,3$.

2. 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ 是方程组 $AX=0$ 的基础解系, 证明:
$$2\alpha_1+\alpha_2, 2\alpha_2+\alpha_3, \cdots, 2\alpha_{t-1}+\alpha_t, 2\alpha_t+\alpha_1$$
也是方程组 $AX=0$ 的基础解系.

3. 已知 A 是 n 阶方阵, 多项式 $g(x)$ 满足 $g(A)=O$. 证明: 对于任意非零多项式 $f(\lambda)$, 当 $(f(\lambda), g(\lambda))=d(\lambda)$ 时, $f(A)$ 与 $d(A)$ 的秩相等.

4. 已知
$$W_1=\left\{\left.\begin{pmatrix} a & 0 & d \\ c & 0 & b \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} \right| a, b, c, d \in \mathbb{R}\right\}, W_2=\left\{\left.\begin{pmatrix} x & 0 & z \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right| x, y, z \in \mathbb{R}\right\}$$
求 W_1+W_2 与 $W_1 \cap W_2$, 并指出维数和基.

5. 已知线性空间 V, W_1, W_2 满足 $V=W_1 \oplus W_2$, 对任意的 $X \subset V$, 记 $X=X_1+X_2, X_i \in W_i(i=1,2)$, 定义线性变换 σ, 使得 $\sigma(X)=X_1$, 则称 σ 是 V 上的投影变换. 证明: 线性变换 σ 是 V 的投影变换当且仅当 σ 在任意基下的矩阵 A 满足 $A^2=A$.

6. 已知矩阵
$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$
(1) 若 A 是有理数域上的矩阵, 判断 A 是否可以对角化, 并说明理由.

(2) 若 A 是复数域上的矩阵, 判断 A 足否可以对角化, 并说明理由.

7. 设 σ, τ 是欧氏空间 V 上的两个线性变换: 满足 $(\sigma\alpha, \beta)=(\alpha, \tau\beta), \forall \alpha, \beta \in V$. 证明: σ 的核是 τ 的值域的正交补空间.

8. 设 A 是 n 阶反对称矩阵, 对于任意常数 λ, 若存在非零列向量 α, 都有 $|A+\lambda\alpha\alpha'|=|A|$ 成立.

59 湖南大学 2024 年数学分析试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日上午 8:30-11:30)

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 150 分

1. 解答如下问题:

(1) 已知 $0<x_1<1, x_{n+1}=x_n\left(1-x_n\right), n=1,2,\cdots$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n=1$.

(2) 设 $0<p<1, 0<x_1<\dfrac{1}{p}, x_{n+1}=x_n\left(1-px_n\right)$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n=\dfrac{1}{p}$.

2. 设函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可导.

(1) 记 $x_n=f\left(x_0+\dfrac{1}{n^2}\right)+f\left(x_0+\dfrac{2}{n^2}\right)+\cdots+f\left(x_0+\dfrac{n}{n^2}\right)-nf\left(x_0\right)$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\dfrac{1}{2}f'\left(x_0\right)$.

(2) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{n^2}+\sin\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\sin\dfrac{n}{n^2}\right)$.

(3) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)$.

3. 解答如下问题:

(1) 设 $f(x)$ 为三次多项式, $x\in[-1,1]$. 证明:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}[f(1)+4f(0)+f(-1)].$$

(2) 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的三次多项式, 证明:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right].$$

4. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续, 对任意的 $h>0$, 序列 $\{f(nh)\}$ 极限存在. 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在.

5. 设函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$. 证明:

(1) 存在 $M>0$, 对任意的正整数 n 及 $x\in[a,b]$, 有 $|f_n(x)|\le M$, 且 $|f(x)|\le M$.

(2) 若 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 那么 $\{g\left(f_n(x)\right)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $g(f(x))$.

6. 设 $f(x)=\dfrac{1}{4}x(2\pi-x), x\in[0,2\pi]$.

(1) 将 $f(x)$ 展开为 $[0,2\pi]$ 上的 Fourier 级数, 并计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$.

(2) 通过将 $f(x)$ 的 Fourier 级数逐项积分, 计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}$.

7. 设 $f(x), g(x)$ 在 (a,b) 上连续, 什么情况下方程 $f(x)y=g(x)$ 在 (a,b) 上确定了唯一的连续解?

8. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 证明: 含参量积分 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x} f(x)\mathrm{d}x$ 在 $\alpha \in [0,+\infty)$ 上一致收敛的充要条件为 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

9. 计算曲面积分

$$\iint_S xyz\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)\mathrm{d}S$$

其中 S 为 $x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$ 在第一封限的部分.

60　湖南大学 2024 年高等代数试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日下午 2:00-5:00)

考试形式: 闭卷　　考试时间: 180 分钟　　满分: 150 分

1. 设 $f(x)=(x+1)^{2024}-x^{2024}-1$.

   (1) 求 $f'(x)$.

   (2) 求 $f'(x)$ 的所有复数根及在复数域和实数上的不可约因式分解.

   (3) 判断 $f(x)$ 是否有重根, 并说明理由.

2. 判断题. 正确的请简要证明, 错误的请举出反例.

   (1) 已知 $V=W_1\oplus W_2$, 则对任意的 $\alpha\in V$, 有 $\alpha\in W_1$ 或 $\alpha\in W_2$.

   (2) 多项式 $p(x)$ 在数域 $\mathbb{K}$ 上不可约, 则 $p\left(x^2\right)$ 在数域 $\mathbb{K}$ 上也不可约.

   (3) 当 n 为偶数, 则存在 $A,B\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, 满足对任意的 $0\neq\alpha\in\mathbb{R}^n$, 都有 $A\alpha,B\alpha$ 线性无关.

3. 设 n 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&&&\\&1&-1&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&1&-1\\&&&&1\end{pmatrix}$, 求 A^{-1}.

4. 记 $N(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}\mid\lambda A$ 和 A 相似 $\}$.

   (1) $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, 求 $N(A)$.

   (2) A 不是幂零矩阵, 证明: $N(A)$ 为有限集.

5. 已知 V 为有限维线性空间, $\mathscr{A}$ 为 V 上的线性变换.

   (1) 证明: $\dim V=\dim\operatorname{Ker}\mathscr{A}+\dim\operatorname{Im}\mathscr{A}$.

   (2) 证明: $\mathscr{A}$ 可逆的充要条件是 $\mathscr{A}$ 为单射.

   (3) 举例说明 V 为无限维线性空间时, (2) 不成立.

6. 设 A 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶矩阵, 证明 $r(A)=r$ 的充要条件是: 存在两个线性无关的向量组

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\in K^n,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r\in\mathbb{K}^n.$$

   使得

$$A=\alpha_1\beta_1^T+\alpha_2\beta_2^T+\cdots+\alpha_r\beta_r^T$$

7. 设 A 为复数域上的 n 阶可逆矩阵, A^2 在复数域上可相似对角化, 证明: A 在复数域上可相似对角化.

8. 设 $A = \left(a_{ij}\right)$ 为 3 阶实正定对称矩阵, 且 $a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$, 求矩阵 A, 并证明你的结论.

61　中南大学 2024 年数学分析试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日上午 8:30-11:30)

微信公众号：八一考研数学竞赛

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 150 分

1. 计算题. 每题 10 分, 共 40 分.

(1) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{4n^2}\right)^{n^2+4n+3}$.

(2) 已知 $f(x)=\begin{vmatrix} e^x & x^2 & 2 \\ 1 & 3x & 4x^2 \\ 0 & 5 & e^{2x} \end{vmatrix}$, 求 $f'(x)$.

(3) 求定积分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta$.

(4) 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 的和.

2. (10 分) 设 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上满足: 对任意的 $x\in[a,b]$, $f_n'(x)$ 存在. 且

(1) 对任意的 $x_0\in[a,b]$, $\{f_n(x_0)\}$ 收敛.

(2) $\left\{f_n'(x)\right\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

证明: $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

3. (20 分) 证明: $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

4. (15 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上二阶连续可导, $f(\pi)=2$, 且

$$\int_0^{\pi}\left[f(x)+f''(x)\right]\sin x\ \mathrm{d}x=5.$$

求 $f(0)$.

5. (15 分) 计算以下曲线积分

$$\int_C x^2y\ \mathrm{d}x+(y-3)\mathrm{d}y.$$

其中 C 为长方形区域的边界, 沿顺时针方向, 长方形四个顶点分别为

$$(0,0),(0,1),(2,0),(2,1)$$

6. (15 分) 定义以下二元函数

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+x^2y+xy^2+2y^4}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

证明:

(1) f 在 $(0,0)$ 点连续.

(2) f 在 $(0,0)$ 点处存在偏导数.

(3) f 在 $(0,0)$ 点处是否可微? 请详细说明.

7. (15 分) 设 $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ 一阶连续可导, 且满足对任意的 $x,y\in(0,1)$, 有 $|f(x)-f(y)|\le|x-y|^2$, 证明: f 恒为常数.

8. (20 分) 已知 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的单调连续函数, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x=0$$

62 中南大学 2024 年高等代数试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日下午 2:00-5:00)

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 150 分

1. (16 分) 证明: 任意给定 $k(k \geq 1)$ 个两两不等的素数 $a_1, a_2, \cdots, a_k$, 对任意的正整数 $n(n>1)$, 都有 $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_k}$ 是无理数.

2. (20 分) 解答如下问题:

(1) (10 分) 设 n 阶行列式

$$D=\left|\begin{array}{ccccc}1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\end{array}\right| .$$

求 D 展开式的正项总数.

(2) (10 分) 计算 n 阶行列式

$$D_n=\left|\begin{array}{cccc}\frac{1-a_1^n b_1^n}{1-a_1 b_1} & \frac{1-a_1^n b_2^n}{1-a_1 b_2} & \cdots & \frac{1-a_1^n b_n^n}{1-a_1 b_n} \\ \frac{1-a_2^n b_1^n}{1-a_2 b_1} & \frac{1-a_2^n b_2^n}{1-a_2 b_2} & \cdots & \frac{1-a_2^n b_n^n}{1-a_2 b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1-a_n^n b_1^n}{1-a_n b_1} & \frac{1-a_n^n b_2^n}{1-a_n b_2} & \cdots & \frac{1-a_n^n b_n^n}{1-a_n b_n}\end{array}\right| .$$

3. (16 分) 设 A 为 $m \times n$ 实矩阵, b 是 $m \times 1$ 实列向量.

(1) 证明: $\operatorname{rank}\left(A^T A\right)=\operatorname{rank}(A)$.

(2) 设 $X=\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)^T$, 证明: 线性方程组 $A^T A X=A^T b$ 有解.

(3) 试举反例说明对复矩阵 A, 结论 $\operatorname{rank}\left(A^T A\right)=\operatorname{rank}(A)$ 不一定成立, (2) 中线性方程组不一定有解.

4. (16 分) 设 W_1, W_2 是线性空间 $\mathbb{P}^{2 \times 2}$ 的子空间, $W_1=L\left(A_1, A_2\right), W_2=\left(B_1, B_2\right)$, 其中

$$A_1=\left(\begin{array}{ll}1 & 1 \\ 0 & 0\end{array}\right), A_2=\left(\begin{array}{ll}1 & 0 \\ 1 & 1\end{array}\right), B_1=\left(\begin{array}{ll}0 & 0 \\ 1 & 1\end{array}\right), B_2=\left(\begin{array}{ll}0 & 1 \\ 1 & 0\end{array}\right).$$

(1) 求 W_1+W_2 的一组基与维数.

(2) 求 $W_1 \cap W_2$ 的一组基与维数.

(3) 问 $\mathbb{P}^{2 \times 2}=W_1 \oplus W_2$ 是否成立, 为什么?

5. (18 分) 给定前 n 个自然数 $1, 2, \cdots, n$ 的一个全排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$, 定义复数域上线性空间 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 的一个线性变换 φ 如下:

$$\varphi\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_n} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \cdots & a_{2j_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj_1} & a_{nj_2} & \cdots & a_{nj_n} \end{pmatrix}.$$

(1) 试确定 φ 的 n 个线性无关的特征向量.

(2) 证明: 存在正整数 k, 使得对 φ 的任意特征值 λ, 都有 $\lambda^k = 1$.

(3) 证明: 如果全排列 $j_1 j_2 \cdots j_n = 23 \cdots n1$, 那么相应的线性变换 φ 是可对角化的.

6. (16 分) 设 A 为 n 阶半正定矩阵, E 为 n 阶单位矩阵. 证明:

$$|A + 2024E| \geq 2024^n.$$

并且等号成立当且仅当 $A = O$.

7. (16 分) 设 σ, τ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, $\sigma^2 = \sigma$. 证明:

(1) $V = \operatorname{Im}\sigma \oplus \operatorname{Ker}\sigma$.

(2) σ 的像 $\operatorname{Im}\sigma$ 与核 $\operatorname{Ker}\sigma$ 都是 τ 的不变子空间当且仅当 $\sigma\tau = \tau\sigma$.

8. (16 分) 设数域 $\mathbb{P}$ 上的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.

(1) 求矩阵 A 的 Jordan 标准形 J.

(2) 求可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP = J$.

(3) 求 A 的最小多项式.

9. (16 分) 设 V 是实数域上所有 n 阶对称矩阵构成的线性空间, 对任意的 $A, B \in V$, 定义

$$(A, B) = \operatorname{tr}(AB).$$

其中 $\operatorname{tr}(AB)$ 表示 AB 的迹.

(1) 证明: V 构成一欧氏空间.

(2) 求使 $\operatorname{tr}(A) = 0$ 的子空间 S 的维数.

(3) 求 S 的正交补空间 $S^{\perp}$ 的维数.

63 云南大学 2024 年数学分析试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日上午 8:30-11:30)

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 150 分

1. 填空题. 每题 5 分, 共 30 分.

(1) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot x-\dfrac{1}{x}\right)=$______.

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{ax}, & x\le 0;\\ (x-b)^3, & x>0.\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导, 则 a 和 b 的值分别是______.

(3) 不定积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{2\mathrm{e}^{-x}+e^{x}+2}=$______.

(4) 曲面 $z=x+2y+\ln\left(1+x^2+y^2\right)$ 在 $(0,0,0)$ 的切平面方程是______.

(5) 设 $f(x,y)=\displaystyle\int_0^{xy}\mathrm{e}^{xt^2}\,\mathrm{d}t$, 则 $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=$______.

(6) 曲线 $y=\displaystyle\int_0^x\tan t\,\mathrm{d}t, 0\le x\le\frac{\pi}{4}$ 的弧长 $s=$______.

2. (15 分) 按定义证明: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(x-1)}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}$.

3. (15 分) 判别级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}(a>0)$ 的敛散性.

4. (15 分) 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上二阶可导, 并且 $g''(x)\neq 0, f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$. 证明:

(1) 在开区间 (a,b) 内, $g(x)\neq 0$.

(2) 在开区间 (a,b) 内, 至少存在一点 ξ, 使得 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

5. (15 分) 已知函数 $z=u\mathrm{e}^{ax+by}$, 其中 $u=u(x,y)$ 具有二阶偏导数, 且 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$. 确定常数 a,b, 使得函数 $z=z(x,y)$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial z}{\partial x}+3\frac{\partial z}{\partial y}+6z=0$$

6. (15 分) 设 $f(x)$ 在 $t\neq 0$ 时一阶连续可导, 且 $f(1)=0$. 求函数 $f\left(x^2+y^2\right)$, 使得曲线积分

$$\int_L y\left(2-f\left(x^2+y^2\right)\right)\mathrm{d}x+xf\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}y$$

与路径无关, 其中 L 为不经过原点的光滑曲线.

7. (15 分) 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n(n+2)x^{n-1}$ 的和函数.

8. (15 分) 计算极限 $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\iint_D\min\{x,y\}\mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $D:[-a,a]\times[-a,a]$.

9. (15 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续, $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$. 证明: $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

64 云南大学 2024 年高等代数试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日下午 2:00-5:00)

微信公众号：八一考研数学竞赛

考试形式: 闭卷　　考试时间: 180 分钟　　满分: 150 分

1. 填空题, 每题 5 分, 共 30 分.

(1) 多项式 $\left(x^{2023}-1, x^{2024}-1\right)=$______.

(2) 秩为 r 的 n 阶方阵 A 满足 $A^2=A$, 则 A 的所有一阶主子式之和 $=$______.

(3) 实二次型 $x_1^2-3x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$ 的符号差为______.

(4) 由所有 n 阶对称矩阵构成的实线性空间的维数 $=$______.

(5) 若 3 阶方阵 A 的行列式是 1 , 迹是 2 , 并且各项式 $f(x)=x^2-2x$ 与 A 的特征多项式不互素, 写出 A 的所有特征值______.

(6) 记 E 是 n 阶单位阵, 若 n 阶方阵 A, B 满足 $AB-BA=E+A$, 则 A^{2024} 的行列式等于______.

2. (15 分) 求实数 b, 使得实系数线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=2 \\ 2x_1+2x_3=0 \\ 2x_1+x_2+2x_3+x_4=2 \\ bx_1+2x_2+bx_3+2x_4=b \end{cases}$$

有解, 并在有解的情况下求所有的解.

3. (15 分) 计算 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{pmatrix}$ 的行列式.

4. (15 分) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 求 A 的 Jordan 标准形.

5. (15 分) 用正交的线性替换化四元实二次型 $\sum\limits_{1\le i\le j\le 4} x_ix_j$ 成平方和的形式.

6. (15 分) 证明: 每一个 n 维线性空间都可以写成 n 个 1 维线性空间的直和.

7. (15 分) 证明: n 阶实对称矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

正定, 并且它有 n 个互不相同的正特征值.

8. (15 分) 设 V 是 n 维欧氏空间, $\gamma,\alpha_1,\cdots,\alpha_m\in V$ 满足 $(\gamma,\alpha_k)>0,\left(\alpha_i,\alpha_j\right)\leq 0$ 对一切的 $i,j,k\in\{1,2,\cdots,m\}$ 且 $i\neq j$. 证明: $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关.

9. (15 分) 记 End (V) 是由 n 维复线性空间 V 上的所有线性变换构成的线性空间. 周定 $\sigma\in\mathrm{End}(V)$, 定义 $\mathrm{End}(V)$ 上的变换 φ 为 $\varphi(\rho)=\sigma\rho-\rho\sigma,\forall\rho\in\mathrm{End}(V)$. 证明: φ 是 $\mathrm{End}(V)$ 上的线性变换, 并且若线性变换 $\tau\in\mathrm{End}(V)$ 使得对某个正整数 m 有 $\varphi^m(\tau)=0$, 则 σ 的任一个根子空间都是 $\tau-$ 子空间.

65 东北师范大学 2024 年数学分析试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日上午 8:30-11:30)

微信公众号：八一考研数学竞赛

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 150 分

1. 计算题. 每题 6 分, 共 30 分.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\cdots+\dfrac{1}{2n+1}\right)$.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\displaystyle\int_x^{x+1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t+\ln t}}$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}\right)$.

(4) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1\left|xy-\frac{1}{4}\right|\mathrm{d}y$.

(5) 求球面 $x=\sin\varphi\cos\theta, y=\sin\varphi\sin\theta, z=\cos\varphi$ 在对应 $\theta=\varphi=\dfrac{\pi}{4}$ 处的切平面和法线方程.

2. (15 分) 由方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2-uv=0; \\ xy+u^2-v^2=0. \end{cases}$$

能否确定 u, v 为 x 与 y 的函数? 在能确定隐函数的条件下, 求 u_x, v_x, u_y, v_y.

3. (15 分) 求函数 $f(x,y)=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$ 在 $(x,y)\in[0,2\pi]\times[0,2\pi]$ 的所有极值点.

4. (15 分) 计算曲面积分

$$I=\iint_S\left(z^2+x\right)\mathrm{d}y\ \mathrm{d}z+\sqrt{z}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y.$$

其中 S 为抛物面 $z=\dfrac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$ 在 $z=0$ 和 $z=\pi$ 之间的部分, 定向取下侧.

5. (15 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有任意解导数, 且对任意实数 x 及 $n=0,1,2,\cdots$, 满足

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\le n!|x|.$$

证明: $f(x)=0, x\in(-\infty,+\infty)$.

6. 设 D 为平面区域, $u(x,y)\in C^2(D)$, 证明: $u(x,y)$ 为调和函数, 即 u 满足 $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$ 的充要条件是: 对 D 内任一圆周 L, 且 L 所围圆属于 D, 都有 $\displaystyle\int_L\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=0$,$n$ 为外法向量.

7. (15 分) 设 $\{a_n\}$ 是正的单调递增序列, 证明: 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 当 $\{a_n\}$ 有界时收敛, 当 $\{a_n\}$ 无界时发散。

8. (15 分) 令 $f(t)=\int_1^{+\infty}\frac{\cos xt}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. 证明:

(1) 积分在 $t\in(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

(2) $f(t)\in C(-\infty,+\infty)$.

(3) $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=0$.

9. (15 分) 设 $\{f_n\}$ 是 $[a,b]$ 上连续的函数列, 对任意的 $x\in[a,b]$, 有 $f_n(x)\leq f_{n+1}(x), n=1,2,\cdots$. 证明: 若 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上收敛于连续函数 f, 则 $\{f_n\}$ 必定一致收敛于 f.

66 东北师范大学 2024 年高等代数试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日下午 2:00-5:00)

考试形式: 闭卷 考试时间: 180 分钟 满分: 150 分

1. (15 分) 求下列行列式

$$\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix}$$

2. (15 分) 设 A 为一个 4 阶实对称矩阵, 特征值为 $0,0,0,4$, 属于特征值 0 的线性无关的特征向量为

$$(-1,1,0,0)',(-1,0,1,0)',(-1,0,0,1)'.$$

求矩阵 A.

3. (10 分) 设 $f(x)=x^m-1,g(x)=x^n-1$, 其中 m,n 为正整数, 证明: $(f(x),g(x))=x^d-1$, 其中 d 为 m,n 的最大公因式.

4. (15 分) 设 $V_1,V_2,\cdots,V_m$ 是有理数域上向量空间 V 的 m 个真子空间, 证明: V 中必定有一个向量 α, α 不属于任何一个 V_i.

5. (15 分) 设 A 是复数域上的 n 阶幂等矩阵, 且 $A=A_1+A_2+\cdots+A_k$, 其中 k 是大于等于 2 的正整数, 又有 $r(A)=r(A_1)+r(A_2)+\cdots+r(A_k)$. 证明: $A_i^2=A_i, A_iA_j=O(i\neq j)$.

6. (15 分) 如果二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 仅在 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 时为零, 证明: f 必定是正定型或负定型.

7. (15 分) 设 φ 是 n 维欧氏空间 V 上的对称变换, 证明: 对 V 中任意向量 α 都有 $(\varphi(\alpha),\alpha)\geq 0$ 的充分必要条件是 φ 的全部特征值都为非负实数.

8. (20 分) 设直线 $l_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-1}, l_2:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-2}$ 和平面 $\pi: x+y+z=0$, 求与直线 l_1,l_2 相交且平行于 π 的所有直线构成的曲面 S 的方程.

9. (20 分) 证明方程 $5x^2+5y^2+2z^2-8xy-2xz-2yz+20x+20y-40z-16=0$ 表示的曲面是柱面, 并指出此柱面的母线方向及一条准线方程.

10. (10 分) 证明: O,A,B 不共线, $A\neq B$, 则点 C 与点 A,B 共线的充分必要条件是向量 $\overrightarrow{OC}$ 可以分解为向量 $\overrightarrow{OA}$ 和向量 $\overrightarrow{OB}$ 的线性组合, 且分解的系数之和为 1 .

67 郑州大学 2024 年数学分析试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日上午 8:30-11:30)

考试形式: 闭卷　　考试时间: 180 分钟　　满分: 150 分

1. (10 分) 求函数极限 $\lim\limits_{x \to 0^+} \left[\dfrac{1}{x(1+x)^{\frac{1}{x}}} - \dfrac{1}{x\mathrm{e}} \right]$.

2. (10 分) 求定积分 $\displaystyle\int_0^{2024} \frac{x}{\mathrm{e}^{2024-x} + \mathrm{e}^x} \mathrm{d}x$.

3. (10 分) 设椭圆 $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ 在点 $A\left(1, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ 的切线交 y 轴于点 B, L 是从 A 到 B 的直线段, 计算

$$\int_L \left(\frac{\sin y}{x+1} - \sqrt{3}y \right) \mathrm{d}x + (\cos y \ln(1+x) + 2\sqrt{3}x - \sqrt{3}) \mathrm{d}y.$$

4. (10 分) 讨论 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{p-1} + \frac{1}{x}} \mathrm{d}x (p \ge 0)$ 的条件收敛和绝对收敛性.

5. (10 分) 求函数 $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1+2t)}{t} \mathrm{d}t$ 的考克劳林级数展开式.

6. (15 分) 讨论方程 $f(x) = -\dfrac{1}{2}\left(1 + \mathrm{e}^{-1}\right) + \displaystyle\int_{-1}^{1} |x-t| \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t = 0$ 在 $[-1, 1]$ 上根的个数.

7. (15 分) 设 $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha |y|^\alpha}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$ 证明:

(1) 当 $\alpha > 1$ 时, $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 连续.

(2) 当 $\alpha > \dfrac{3}{2}$ 时, $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 可微.

8. (15 分) 证明: 函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上点点收敛, 但并非一致收敛.

9. (35 分) 证明题.

(1) (5 分) 已知 $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$, 求 a, b.

(2) (10 分) 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续, $g(x) \in C([a, +\infty))$, 且 $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - g(x)] = 0$. 证明: $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续.

(3) (5 分) 用 (2) 的结论说明 $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上一致连续.

(4) (15 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导, 且存在常数 $a, b, c, d (a < c)$ 使得

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0, \lim_{x \to +\infty} [f(x) - (cx + d)] = 0.$$

证明: 对任意的 $\lambda \in (a, c)$, 存在 $\xi \in (-\infty, +\infty)$, 使得 $f'(\xi) = \lambda$.

10. (20 分) 证明:

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin ux}{x}\,\mathrm{d}x$ 在任何不包含 $u=0$ 的闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛.

(2) 已知 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$, 求 $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 xt}{t^2}\,\mathrm{d}t (x>0)$.

68 郑州大学 2024 年高等代数试题真题

(考试时间：2023 年 12 月 24 日下午 2:00-5:00)

微信公众号：八一考研数学竞赛

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 150 分

一. 填空题. 每题 5 分, 共 30 分.

1. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=$______.

2. 设 n 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{pmatrix}, n \geq 3, A$ 的秩为 $n-1$, 则 $a=$______.

3. 设 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 为 4 阶矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵, 若单个向量 $\beta \neq 0$ 是方程组 $AX=0$ 的一个基础解系, 则 $A^*X=0$ 的基础解系含有解向量的个数是______.

4. 实二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=(x_1+2x_2)^2+(2x_2-x_3)^2+(x_1+x_3)^2$ 的正惯性指数为______.

5. 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \alpha_4=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, 且 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 等价, 则 a 满足______.

6. 设 σ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, σ 有 n 个不同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则 V 的所有 σ 不变子空间的个数是______.

二. 计算与证明. 每题 15 分, 共 120 分.

1. 如果实系数多项式 $f(x)$ 满足 $f\left(2x^2+1\right)=2f^2(x)+1, \forall x \in \mathbb{R}, f(0)=0$, 证明: $f(x) \equiv x$.

2. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, 当 a, b 为何值时, 存在矩阵 C, 使得 $AC-CA=B$, 并求所有矩阵 C.

3. 设 A 是 n 阶矩阵, $n>1$. 如果对任意 n 阶矩阵 B 都有 $|A+B|=|A|+|B|$, 证明: $A=O$.

4. 已知实二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=ax_1^2+ax_2^2+ax_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 用正交替换 $X=TY$ 化为标准形 $f(x_1, x_2, x_3)=by_1^2+cy_2^2, b, c \neq 0$, 求 a, b, c 并写出正交替换及所化成的标准二次型.

5. 求复矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -3 & -6 & -1 \end{pmatrix}$ 的约当标准形 J, 并求可逆矩阵 T, 使得 $T^{-1}AT=J$.

6. 设

$$\alpha_1=\begin{pmatrix} a_1+b \\ a_1 \\ \vdots \\ a_1 \end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix} a_2 \\ a_2+b \\ \vdots \\ a_2 \end{pmatrix}, \cdots, \alpha_n=\begin{pmatrix} a_n \\ a_n \\ \vdots \\ a_n+b \end{pmatrix}.$$

其中 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \neq 0$. 这 $W=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$, 求 W 的维数与一组基.

7. 设 A 是 n 阶实矩阵, $A^2=E$, 证明:

(1) $r(A+E)+r(A-E)=n$.

(2) A 与对角矩阵相似.

(3) $\mathbb{R}^n=V_1\oplus V_2$, 其中 $V_1=\{X\in\mathbb{R}^n \mid (A+E)X=0\}$, $V_2=\{X\in\mathbb{R}^n \mid (A-E)X=0\}$.

8. 设 $V=\mathbb{P}^{2\times 2}$ 是数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间, $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in V$, 线性变换 $\sigma: X\rightarrow AX, \forall X\in\mathbb{P}^{2\times 2}$.

(1) 求线性变换 σ 在基

$$E_{11}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

下的矩阵.

(2) 如果 A 相似于对角矩阵, 证明线性变换 σ 在 V 的某组基下的矩阵是对角矩阵.